This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

QA
537
.G85

B 480836

GIFT
MRS. C. W. PATTERSON

TRIGONOMETRISCHE VRAAGSTUKKEN

QA
537
.G85

MET BEKNOPTE THEORIE

DOOR

J. VAN DE GRIEND Jr.,
LEERAAR AAN DE H.B.S. TE KAMPEN.

P. NOORDHOFF. — 1920 — GRONINGEN.

Prijs f

GENERAL LIBRARY
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ARTES · SCIENTIA · VERITAS
1817

(02)

TRIGONOMETRISCHE VRAAGSTUKKEN

MET BEKNOPTE THEORIE

DOOR

J. VAN DE GRIEND Jr.

LEERAAR AAN DE H. B. S. TE KAMPEN

P. NOORDHOFF — 1920 — GRONINGEN

QA
537
.Q85

GIFT
MRS. G. W. PATTERSON
5-23-1932

INHOUD.

CURSUS I.

A. *Goniometrie.*

§ 1. Sinus en cosinus 3
§ 2. Tangens en Cotangens 10
§ 3. Herhaling 1 17
§ 4. Stompe hoeken 19
§ 5. Tafels (zonder log.) 22
§ 6. Secans en cosecans 23
§ 7. Herhaling 2 27
§ 8. Tafels (met log.) 29
§ 9. Meer hoeken 31
§ 10. Herhaling 3 45

B. *Trigonometrie.*

§ 11. Trigonometrie 47
§ 12. Herhaling 4 57

CURSUS II.

C. *Herhaling en uitbreiding.*

§ 13. Kwadranten 59
§ 14. Goniometrie (2e reeks) 65
§ 15. Herhaling 1 73
§ 16. Trigonometrie (2e reeks) 74
§ 17. Herhaling 2 80

D. *Toegepaste trigonometrie.*

§ 18. Toegepaste trigonometrie 81
§ 19. Oppervlak. In- en omgeschreven cirkel 90
§ 20. Herhaling 3 95

E. *Goniometrische vergelijkingen.*

§ 21. Goniometrische vergelijkingen 98
§ 22. Herhaling 4 109

CURSUS III.

F. *Examenvraagstukken.*

§ 23. Eindexamen H. B. S. 116
§ 24. Eindexamen Gymnasium 124
§ 25. Staatsexamen 126

Ter Inleiding.

Voor een verzameling als de hier bijeengebrachte is m.i. nog wel een plaatsje. Ik bedoel een verzameling, waarin de leeraar in ruime keuze en in behoorlijke rangschikking het oefenmateriaal bijeen vindt, dat hij noodig heeft. D.w.z. de vraagstukken, die niet te moeilijk zijn, om van den gemiddelden leerling niet de oplossing te mogen verlangen, die dus aansluiten bij de theorie, bij elkaar, of bij het bekende uit algebra of meetkunde, zonder bijzonder initiatief bij de oplossing te vereischen. Maar toch ook, die van het gemakkelijkste af beginnende, den leerling ruim daar brengen, waar men hem hebben wil.

In de gonio- en trigonometrie is oefening een veel gewichtiger element dan het aanleeren der theorie; daarom is hier van de vraagstukken de hoofdzaak gemaakt en van de theorie slechts zooveel vooruit gegeven (maar dan ook van voldoende duidelijkheid), als noodig is om de vraagstukken te kunnen oplossen.

Daar de opgaven voor verreweg het grootste gedeelte oorspronkelijk zijn, kon ik aan de rangschikking groote zorg besteden; wat bijeen hoorde is bijeengebracht, en wel zooveel mogelijk in opklimming van moeilijkheid. Het is natuurlijk de bedoeling niet, dat al deze opgaven achter elkaar doorgemaakt zouden moeten worden; men zal een keus moeten doen, waarbij door den grooten voorraad voor verschillende jaren en bij verschillende gelegenheden behoorlijke verscheidenheid van stof gewaarborgd is.

De verzameling is ingedeeld in drie cursussen, in overeenstemming met het aantal leerjaren, gewoonlijk aan het vak besteed. De eerste loopt over de elementaire gonio- en trigonometrie; de tweede geeft een herhaling en uitbreiding, met de toegepaste trigonometrie en (ev.) de goniometrische vergelijken; de derde examenvraagstukken (H.B.S., Gymn., Staatsexamen). Ieder der eerste twee cursussen is in 4 afdeelingen gesplitst, elk met een herhaling, — met het oog op de driemaandelijksche rapporten.

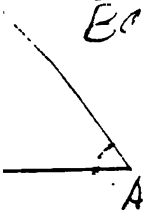
In den eersten cursus ben ik in zooverre afgeweken van den gebruikelijken gang, dat daarin alleen scherpe en stompe hoeken voorkomen, en de behandeling der kwadranten uitgesteld blijft tot den volgenden cursus. Dit is geschied in de eerste plaats omdat deze behandeling voor de stof, die daarop in den eersten cursus volgt, niet beslist noodig is, en datgene, wat natuur- of werktuigkunde van de trigonometrie verlangen en wat dus zoo spoedig mogelijk bereikt moet worden, in hoofdzaak iets verder ligt: bij de sinus- en cosinusregels en derg.; en in de tweede plaats, omdat die kwadranten voor den eersten beginner nog al wat moeite plegen op te leveren (bij weinig aantrekkelijkheid !), die veel verminderd wordt, wanneer hij in den tweeden cursus reeds wat met de begrippen is vertrouwd geraakt.

In den tweeden cursus is de behandeling der goniometrische vergelijkingen behouden, ook al waren zij van het eindexamenprogramma der H. B. S. geschrapt. Ik geloof, dat de meeste collega's in dit onderdeel met mij een zeer geschikte herhaling en vastlegging van de vroeger reeds geleerde regelen en methoden zien, die zij niet gaarne zouden missen.

In den derden cursus vindt men de eindexamenvraagstukken der H. B. S. (vanaf 1900), van verschillende gymnasia in 1919, en verschillende staatsexamenopgaven (vanaf 1914).

Moge de verzameling, zooals zij mij, bijeengebracht in den loop van vele jaren, van dienst is geweest, ook voor anderen nuttig kunnen zijn.

v. d. G.



CURSUS I.

Elementaire goniometrie en trigonometrie.

A. GONIOMETRIE.

§ 1. Sinus en cosinus.

Theorie.

a. Definitie.

De *sinus* van een hoek is de standvastige verhouding van de loodlijn, uit een willekeurig punt van het eene been op het andere been neergelaten, tot het stuk van het eerste been, dat door die loodlijn geprojecteerd wordt: (Fig. 1)

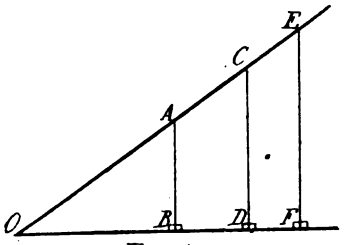


Fig 1.

$$\sin AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \ldots\ldots\ldots$$

De *cosinus* van een hoek is de standvastige verhouding van de projectie van een willekeurig stuk van het eene been op het andere been, tot het stuk van het eerste been, dat door die loodlijn geprojecteerd wordt: (Fig. 1)

$$\cos AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \ldots\ldots\ldots$$

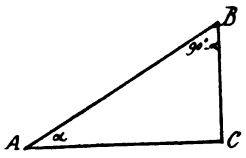


Fig 2.

In een rechthoekigen driehoek is de sinus van een scherpen hoek de verhouding van de overstaande rechthoekszijde tot de schuine zijde, en de cosinus van een scherpen hoek de verhouding van de aanliggende rechthoekszijde tot de schuine zijde: (Fig. 2)

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB};$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

---

b. Formules.

Uit ∠ ABC (Fig. 2) volgt

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \text{ en } \cos (90^0 - \alpha) = \frac{BC}{AB};$$

dus

$$\boxed{\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)} \quad \text{(Form. 1)}$$

of ook

$$\boxed{\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha}$$

Uit △ ABC (Fig. 2) volgt verder

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \text{ en } \cos \alpha = \frac{AC}{AB},$$

dus

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1,$$

of

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.} \quad \text{(Form. 2)}$$

Laat men in △ ABC (Fig. 2) ∠ A steeds kleiner worden, terwijl de zijde AB even lang blijft, dan wordt BC ook steeds kleiner, terwijl AC grooter wordt en nadert tot de lengte van AB. Als ∠ A = 0 geworden is, is BC = 0 geworden en AC = AB.

Daaruit volgt $\sin 0 = \frac{0}{AB} = 0$, $\cos 0 = \frac{AB}{AB} = 1$, dus

$$\boxed{\sin 0 = 0} \quad \text{(Form. 3)}$$

$$\boxed{\cos 0 = 1} \quad \text{(Form. 4).}$$

Laat men in △ ABC (Fig. 2) ∠ A steeds grooter worden, terwijl de zijde AB even lang blijft, dan wordt BC steeds grooter en nadert tot de lengte van AB, terwijl AC steeds kleiner wordt. Als ∠ A = 90⁰ geworden is, is BC = AB geworden en AC = 0.

Daaruit volgt $\sin 90^0 = \frac{AB}{AB} = 1$, $\cos 90^\circ = \frac{0}{AB} = 0$, dus

$$\boxed{\sin 90^\circ = 1} \quad \text{(Form. 5)}$$

$$\boxed{\cos 90^\circ = 0} \quad \text{(Form. 6).}$$

Vraagstukken.

a. Definitie.

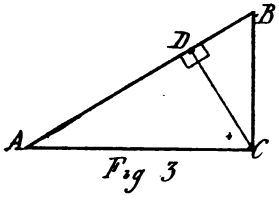


Fig 3

1. Invullen (Fig. 3):

a. sin ACD =
b. cos ACD =
c. sin DCB =
d. cos DCB =
e. sin A = (twee vormen),
f. cos A = (twee vormen),
g. sin B = (twee vormen),
h. cos B = (twee vormen).

2. Eveneens (Fig. 4) in den gelijkbeenigen △ EFG (alles op twee wijzen):

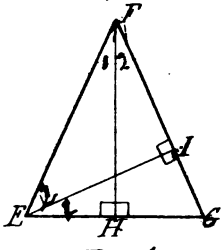


Fig 4

a. $\frac{FH}{EF} =$, *e.* $\frac{EI}{EF} =$,
b. $\frac{EH}{EF} =$, *f.* $\frac{FI}{EF} =$.
c. $\frac{IG}{EG} =$,
d. $\frac{EI}{EG} =$,

3. Als van een gelijkbeenigen driehoek het been = 25 en de projectie = 7 van dit been op het andere been gegeven zijn, bepaal dan de sinussen en cosinussen:
a. van den tophoek,
b. van den basishoek,
c. van den halven tophoek.

4. Van een gelijkbeenigen driehoek is de basis 10 en het been 13. Bereken sinus en cosinus:
a. van den basishoek,
b. van den halven tophoek,
c. van den heelen tophoek.

5. Van een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde 20, en de cosinus van den hoek, dien zij met de hoogtelijn op de

schuine zijde maakt, $\frac{3}{5}$. Bereken de zijden van dien driehoek en sinus en cosinus van zijn scherpe hoeken.

6. Bepaal sinus en cosinus van een hoek van:
a. 30°, *b.* 45°, *c.* 60°.

7. In een ruit is een zijde a en een scherpe hoek α. Bereken:
a. de hoogtelijn van de ruit en de projectie van een zijde op de volgende,
b. de diagonalen van de ruit,
c. de projectie van de kleinste diagonaal op een zijde.

8. In een rechthoekig trapezium is het rechthoekige been 6, de grootste evenwijdige zijde 12 en de sinus van den scherpen hoek $\frac{4}{5}$. Bereken:
a. de zijden van dat trapezium,
b. sinus en cosinus van de hoeken, die de diagonalen met de evenwijdige zijden maken,
c. sinus en cosinus van den hoek, dien de grootste diagonaal met het schuine been maakt.

9. In een trapezium staat een diagonaal = 12 in een der uiteinden van de kleinste evenwijdige zijde = $7\frac{8}{13}$ loodrecht op een been = 5. Bereken sinus en cosinus van de scherpe hoeken van dat trapezium.

10. Een rechthoekszijde van een rechthoekigen driehoek is $p + q$ en haar projectie op de schuine zijde p. Bereken sinus en cosinus van de scherpe hoeken van dien driehoek.

11. Van een gelijkbeenig trapezium met evenwijdige zijden van 2 en 14 staan de diagonalen rechthoekig op elkaar. Bereken sinus en cosinus:
a. van de hoeken, die de diagonalen met de evenwijdige zijden maken,
b. van een scherpen hoek van dat trapezium,
c. van de hoeken, die de diagonalen met de beenen maken.

12. Van een rechthoekigen driehoek is de schuine zijde c en een scherpe hoek α. Bepaal:

a. zijn oppervlakte,

b. de oppervlakten van de deelen, waarin de hoogtelijn op de schuine zijde dien driehoek verdeelt.

---

b. Formules.

13. De cosinus van een hoek is $\frac{1}{3}$. Hoeveelmaal is de sinus van dien hoek zoo groot als zijn cosinus?

14. Van een hoek is de sinus $1 - x$. Bepaal den sinus van het complement van dien hoek.

15. Van een hoek is de sinus $\frac{3}{4} \times$ zoo groot als de cosinus. Hoe groot zijn sinus en cosinus ieder?

16. Het produkt van de som en het verschil van sinus en cosinus van een hoek is $\frac{47}{49}$. Bepaal sinus en cosinus.

17. Het verschil van de kwadraten van de sinussen van een hoek en van zijn complement is $\frac{4}{5}$ kleiner dan de som der kwadraten van de cosinussen van een hoek en van zijn complement. Bepaal sinus en cosinus van dien hoek.

18. Druk uit:

a. $\sin(90° - \alpha)$ en $\cos(90° - \alpha)$ in $\cos\alpha$,

b. $\sin(90° - \alpha)$ en $\cos(90° - \alpha)$ in $\sin\alpha$,

c. $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ in $\sin(90° - \alpha)$,

d. $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ in $\cos(90° - \alpha)$.

19. Te bewijzen:

a. $\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \cos 2\alpha$,

b. $\sqrt{1 + \sin(90° - \alpha)} \times \sqrt{1 - \cos\alpha} = \sin\alpha$,

c. $\frac{1}{1 - \sin\alpha} + \frac{1}{1 + \sin\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$,

d. $(a\cos\varphi + b\sin\varphi)(a\cos\varphi - b\sin\varphi)$
$- (b\cos\varphi + a\sin\varphi)(b\cos\varphi - a\sin\varphi) = a^2 - b^2$,

e. $(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2 + (a\sin\varphi - b\cos\varphi)^2 = a^2 + b^2$.

20. Te bewijzen:

a. $\cos\alpha \cos^2\beta + \cos\alpha \sin^2\beta = \cos\alpha$,

b. $(1 - \sin^2\alpha)^2 + (1 - \cos^2\alpha)^2 + 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 1$,

c. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha \cos\alpha$,

d. $2 \cos^2\alpha - (\sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2\alpha)^2 = 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$,

e. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$,

f. $\sin^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\beta \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$,

g. $\sin^2\alpha \sin^2\beta - \cos^2\alpha \cos^2\beta = \sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$.

21. Te bewijzen:

a. $\cos^2\beta - \cos^4\beta = \sin^2\beta - \sin^4\beta$.

b. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2 \sin^2\alpha \sin^2\beta =$
$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2 \cos^2\alpha \cos^2\beta$,

c. $\sin A \cos^2 B + \cos^2 A \sin B = (\sin A + \sin B)(1 - \sin A \sin B)$,

d. $\cos A \sin^2 B + \sin^2 A \cos B =$
$= (\cos A + \cos B)(1 - \cos A \cos B)$.

e. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \sin^2\alpha \cos^2\beta$,

f. $(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 2(1 + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha)$,

g. $\dfrac{1 - \sin^6\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$,

h. $\dfrac{1 + \cos^6\alpha}{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$.

22. Bewijs, dat $\sin(90^\circ - \alpha)$ middelevenredig is tusschen $1 + \sin\alpha$ en $1 - \sin\alpha$.

23. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\alpha$,

b. $\cos^2\alpha - \sin^2(90^\circ - \beta) + \cos^2(90^\circ - \alpha)$,

c. $\sin^2 2\alpha + \sin^2(90^\circ - 2\alpha)$,

d. $1 - \cos^2(90^\circ - \alpha + \beta)$,

e. $2 \cos^2(90^\circ - \alpha - \beta) + 2 \cos^2(\alpha + \beta)$,

f. $\sin(45^\circ - \alpha) : \cos(45^\circ + \alpha)$,

g. $1 - \sin(30^\circ + \alpha) \cos(60^\circ - \alpha)$.

24. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$,

b. $\cos^4\alpha + 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \sin^4\alpha$,

c. $\cos^4\alpha - 2 \cos^2\alpha + 1$,

d. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$,

e. $\cos^2\alpha\,\cos^2\beta+\sin^2\alpha\,\sin^2\beta+\cos^2\alpha\,\sin^2\beta+\sin^2\alpha\,\cos^2\beta$,

f. $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\times\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(90^\circ-\alpha)}}$,

g. $\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin(90^\circ-\alpha}\times\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin^2(90^\circ-\alpha)}}$,

h. $\sqrt{2+2\cos\alpha}+\sqrt{2-2\cos\alpha}$,

i. $\sqrt{\frac{2}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}}$.

25. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sin\alpha-\sin\alpha\,\cos^2\alpha$,

b. $\cos^3\alpha-\cos\alpha$,

c. $\sin^4\alpha\,\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\,\cos^4\alpha$,

d. $-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha$,

e. $1-\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha-\cos^4\alpha$,

f. $(1-\cos\alpha-\sin\alpha)^2-2\,(1-\cos\alpha-\sin\alpha)$.

26. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta-\cos\alpha}-\frac{\sin\beta+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$,

b. $\sqrt{2+2\sin x-\cos^2 x}$,

c. $\sqrt{a^2+b^2-2\,ab\cos\alpha-b^2\sin^2\alpha}$,

d. $\sqrt{a^2+b^2+2\,ab\sin\alpha-b^2\cos^2\alpha}$,

e. $\sqrt{a^2+2\,ab\cos\alpha\,\sin\alpha-(a^2-b^2)\sin^2\alpha}$.

27. Te bewijzen:

a. $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$,

b. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$,

c. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$,

d. $\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha\,\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

e. $\sqrt{1+2\sin x\,\cos x}=\sin x+\cos x$.

28. Als gegeven is $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$, bewijs dan

a. $\cos(\alpha+\beta)=\sin\gamma$,

b. $\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)$.

29. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, bewijs dan

a. $\cos\frac{\beta + \gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$,

b. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} = \sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 2. Tangens en cotangens.

Theorie.

a. Definitie.

De *tangens* van een hoek is de standvastige verhouding van de loodlijn uit een willekeurig punt van het eene been op het andere neergelaten, tot de projectie van het stuk van het eerste been op het tweede, door die loodlijn bepaald: (Fig. 5)

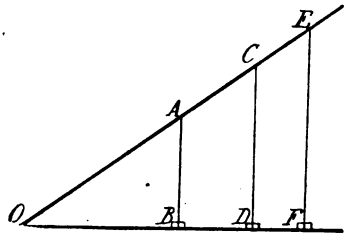


Fig 1. (- 5)

$$\text{tg AOB} = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \ldots\ldots\ldots$$

De *cotangens* van een hoek is de standvastige verhouding van die projectie en die loodlijn: (Fig. 5)

$$\cot \text{AOB} = \frac{OB}{AB} = \frac{OD}{CD} = \frac{OF}{EF} = \ldots\ldots\ldots$$

In een rechthoekigen driehoek is de tangens van een scherpen hoek de verhouding van de overstaande tot de aanliggende rechthoekszijde, en de cotangens van een scherpen hoek is de verhouding van de aanliggende tot de overstaande rechthoekszijde: (Fig. 6)

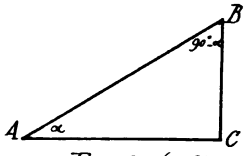


Fig 2. (- 6)

$$\text{tg A} = \frac{BC}{AC}, \quad \cot A = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{tg B} = \frac{AC}{BC}, \quad \cot B = \frac{BC}{AC}.$$

b. Formules.

Uit △ ABC (Fig. 6) volgt:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} \text{ en } \cot(90^0 - \alpha) = \frac{BC}{AC},$$

dus

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \cot(90° - \alpha)} \quad \text{(Form. 7)}$$

of ook

$$\boxed{\cot\alpha = \text{tg}\,(90° - \alpha)}$$

Ook is

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} \text{ en } \cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

dus

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \quad \text{(Form. 8)}$$

en

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}}$$

Verder is (Fig. 6)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{AB \sin \alpha}{AB \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{en } \cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AB \cos \alpha}{AB \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

dus

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad \text{(Form. 9)}$$

en

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad \text{(Form. 10)}$$

Laat men in $\triangle$ ABC (Fig. 7), waarin

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC},$$

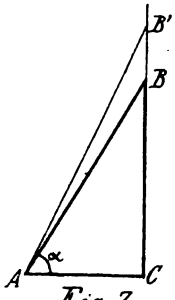


Fig. 7.

$\angle \alpha$ steeds grooter worden, terwijl AC even lang blijft, dan wordt de zijde BC zoo groot als men wil (terwijl α nadert tot 90^0). Hieruit volgt $\operatorname{tg} 90^0 = \frac{\infty}{AC} = \infty$, dus

$$\boxed{\operatorname{tg} 90^\circ = \infty} \quad \text{(Form. 11)}$$

Laat men echter $\angle \alpha$ steeds kleiner worden, terwijl AC even lang blijft, dan wordt BC ook steeds kleiner. Als $\angle \alpha = 0$ geworden is, dan is ook BC = 0 geworden.

Hieruit volgt $\operatorname{tg} 0 = \frac{0}{AC} = 0$, dus

$$\boxed{\operatorname{tg} 0 = 0} \quad \text{(Form. 12)}$$

Laat men in △ ABC (Fig. 8), waarin

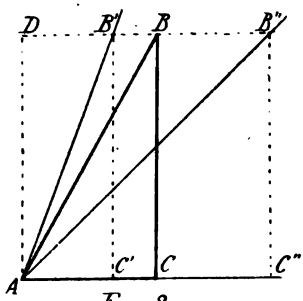


Fig 8

$$\cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{DB}{AD},$$

∠ α steeds grooter worden, terwijl BC = AD even lang blijft, dan wordt DB steeds kleiner (bijv. DB′ enz.) Is ∠ α = 90⁰ geworden, dan is DB′ = 0 geworden, dus $\cot 90^0 = \frac{0}{DA} = 0$, of

$$\boxed{\cot 90^\circ = 0} \quad \text{(Form. 13)}$$

Laat men evenwel ∠ α steeds kleiner worden, terwijl BC = AD even lang blijft, dan wordt DB steeds grooter (bijv. DB″ enz.) Nadert ∠ α tot 0⁰, dan wordt DB″ zoo groot als men wil. Daaruit volgt $\cot 0 = \frac{\infty}{DA} = \infty$, of

$$\boxed{\cot 0 = \infty} \quad \text{(Form. 14)}$$

Vraagstukken.

a. Definitie.

30. Van een rechthoekigen driehoek zijn de rechthoekszijden 18 en 24. Bepaal de tangenten en cotangenten:
   a. van de scherpe hoeken van den driehoek,
   b. van de hoeken, waarin de bissectrices der scherpe hoeken die hoeken verdeelen,
   c. van de hoeken, waarin de hoogtelijn op de schuine zijde den rechten hoek verdeelt.

31. Van een rechthoekigen driehoek is de schuine zijde = 12 en de cosinus van een scherpen hoek $\frac{1}{3}$. Bepaal de tangenten en cotangenten:
   a. van de hoeken, die de zwaartelijnen uit de uiteinden der schuine zijde met de rechthoekszijden maken,
   b. van de hoeken, die dezelfde zwaartelijnen met de schuine zijde maken.

32. Bepaal tangens en cotangens van een hoek van:
   a. 30°, *b.* 45°, *c.* 60°.

33. Van een rechthoekig trapezium wordt een diagonaal door de andere diagonaal rechthoekig verdeeld in stukken van 27 en 12 en maakt een hoek met ieder der evenwijdige zijden, waarvan de tangens $\frac{2}{3}$ is. Bepaal:

a. de andere diagonaal en de zijden,

b. de tangenten en cotangenten van de hoeken, die het schuine been met de grootste evenwijdige zijde en met de diagonalen maakt.

34. Als in den gelijkbeenigen $\triangle$ ABC, met den top B, BD $\perp$ AC en AE $\perp$ BC elkaar in F snijden, druk dan, door middel van de hoeken BAC $= \alpha$ en ABC $= \beta$ ieder van de hierna genoemde rechten uit in de volgende en in de voorgaande:

BD, AD, AB, BD, BC, CA, AE, EB, EF, FB.

35. Als in den rechthoekigen $\triangle$ ABC (rechthoekig in C) $\angle$ BAD $=$ $\angle$ DAC $= \alpha$ en CE $\perp$ AB is, druk dan door middel van dezen hoek α iedere der hierna te noemen rechten uit in de volgende en in de voorgaande:

AC, DC, AD, CA, BC, BE, EC, EA, AC, AB.

36. Als in de ruit ABCD (scherphoekig in A), waarvan de diagonalen elkaar in S snijden, BE $\perp$ AD en DF $\perp$ BC is, druk dan door middel van $\angle$ BAD $= \alpha$ iedere der hierna te noemen rechten uit in de volgende en in de voorgaande:

BE, AB, AE, BE, BD, AD, AS, BD, DC. DF, BF.

37. Van een ruit is een scherpe hoek α. Druk de oppervlakte van die ruit, door middel van α, uit:

a. in de zijde, *b.* in de grootste diagonaal.

38. Bepaal de oppervlakte van een gelijkbeenig trapezium, waarvan de evenwijdige zijden c en d zijn en een scherpe hoek α is.

39. Bij een koorde van een cirkel, die een lengte $= k$ heeft, behoort een boog van $\alpha°$. Bepaal den afstand van het middelpunt tot die koorde.

b. Formules.

40. Bepaal cosinus, tangens en cotangens van een hoek, waarvan de sinus $\frac{5}{13}$ is.

41. Bepaal sinus, tangens en cotangens van een hoek, als de sinus van zijn complement $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ is.

42. Van een hoek is de cosinus *a*. Bepaal cosinus en cotangens van zijn complement.

43. Druk den tangens en den cotangens van een hoek uit: *a.* in den sinus, *b.* in den cosinus.

44. Van een hoek is de cosinus A × zoo groot als de cosinus van zijn complement. Bepaal den tangens van dien hoek.

45. De tangens van een hoek is $\sqrt{5} - 2$. Bepaal den tangens van zijn complement.

46. Als de cotangens van een scherpen hoek 9 × zoo groot is als de cotangens van zijn complement, hoe groot is dan de cotangens van dien hoek?

47. Van een scherpen hoek is het produkt van sinus, cosinus en cotangens 0,92 meer dan het produkt van sinus, cosinus en tangens. Bepaal sinus, cosinus en cotangens van dien hoek.

48. Als de som van tangens en cotangens van een hoek $2\frac{1}{6}$ is, hoe groot zijn dan tangens en cotangens elk?

49. De tangens van een scherpen hoek is $\frac{15}{16}$ × zoo groot als de cosinus. Bepaal van dien hoek den sinus, cosinus, tangens en cotangens.

50. Als de som van sinus en cosinus van een hoek gegeven is $= 1\frac{4}{13}$, bepaal dan sinus, cosinus, tangens en cotangens van dien hoek.

51. Druk in nevenstaande figuur (fig. 9) door middel van $\angle\ \alpha$ in AB $= a$ uit:

a. AE, *b.* EB, *c.* OE, *d.* OD, *e.* OF.

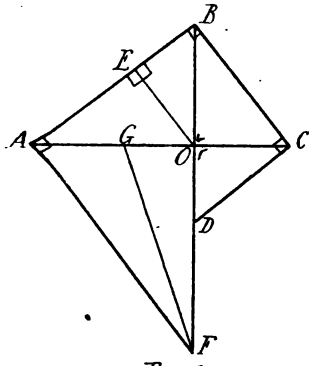


Fig. 9.

52. In dezelfde figuur door middel van $\angle\ \alpha$ in AO $= b$ uit te drukken: *a.* EB, *b.* OD, *c.* BC, *d.* FG (bissectrix van $\angle$ AFO).

53. Van een rechthoekig trapezium staat de kleinste diagonaal rechthoekig op het schuine been. Druk, door middel van den scherpen hoek α van dat trapezium. al zijn zijden en diagonalen uit in het schuine been a.

54. *a.* Druk de stukken der diagonalen en de zijden van een rechthoekig trapezium, waarvan de diagonalen rechthoekig op elkaar staan, uit in het schuine been a en de hoeken β en α, die de grootste diagonaal met het schuine been en een der evenwijdige zijden maakt.

b. Bewijs, dat in deze figuur $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}^3 \alpha$ is.

---

55. Te bewijzen:

a. $\dfrac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \dfrac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cot^2 \alpha,$

b. $\dfrac{\cot \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} : \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = 1,$

c. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 \operatorname{tg} \alpha \cot \alpha,$

d. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha,$

e. $\sin \alpha \cos (90^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha),$

f. $\dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{180^\circ - \alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{180^\circ - \alpha - \beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha - \beta}{2}},$

g. $(1 + \operatorname{tg} \alpha) : (1 + \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)) = \operatorname{tg} \alpha.$

56. Te bewijzen:

a. $\dfrac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q} = \dfrac{\cot p + \cot q}{\cot q - \cot p},$

b. $\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}$,

c. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\,\sin^2\alpha$,

d. $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\,\cos^2\alpha$,

e. $1 + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,

f. $\operatorname{tg}\alpha\,\cos^4\alpha + \cot\alpha\,\sin^4\alpha = \sin\alpha\,\cos\alpha$,

g. $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$,

h. $\dfrac{\operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}$.

57. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$,

b. $\dfrac{1}{\cot(90^\circ - \alpha)}$,

c. $\cot^2(90^\circ - \alpha - \beta)\cot(\alpha + \beta)$,

d. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}}$,

e. $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(90^\circ - \alpha)}} \times \cot(90^\circ - \alpha)$.

58. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\operatorname{tg}^2\alpha\,\cos^2\alpha + \cot^2\alpha\,\sin^2\alpha$,

b. $\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos(90^\circ - \alpha)} : \dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin(90^\circ - \alpha)}$,

c. $\dfrac{\operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha} - (\operatorname{tg}\alpha - \cot\alpha)^2$,

d. $\cot^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$,

e. $\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)\,(1 + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$,

f. $(\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2 - \sin^2\alpha\,\operatorname{tg}^2\alpha - \cos^2\alpha\,\cot^2\alpha$,

g. $\left(\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 + 4\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha$,

h. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)^2 + (\cos^2 x - \tfrac{1}{2})^2$.

§ 3. Herhaling 1.

59. Van een gelijkbeenigen driehoek is de cosinus van den tophoek $\frac{3}{5}$ en de hoogtelijn op een been $\frac{4}{5}\sqrt{5}$. Bereken de zijden van dien driehoek en de sinussen, cosinussen, tangenten en cotangenten van zijn hoeken.

60. Als gegevèn is, dat de som van tangens en cotangens van een hoek $\frac{2(1 + a^2)}{1 - a^2}$ × zoo groot is als hun produkt, bepaal dan:

a. tangens en cotangens van dien hoek,

b. sinus en cosinus van dien hoek.

61. Als de hoogtelijn van een ruit 24 en de tangens van een scherpen hoek $3\frac{3}{7}$ is, bereken dan de zijden van die ruit en de cosinussen, sinussen, tangenten en cotangenten van zijn scherpe hoeken en van de hoeken, die de diagonalen met de zijden maken.

62. Bepaal den omtrek van een rechthoekigen driehoek, waarvan de hoogtelijn op de schuine zijde h en een scherpen hoek A is.

63. Van een vlieger ABCD, waarvan de diagonalen AC en BD elkaar in S rechthoekig snijden en AS = SC is, is gegeven AC = 4, tg BCA = $\frac{1}{2}$ en tg DCA = 2. Bereken de zijden van dien vlieger en sinus, cosinus, tangens en cotangens van ∠ ADC.

64. Het schuine been = s van een rechthoekig trapezium staat loodrecht op de kleinste diagonaal en maakt een hoek A met de grootste evenwijdige zijde. Bepaal de oppervlakte van dat trapezium.

65. Aan twee cirkels, die buiten elkaar liggen (stralen 40 en 15), is de gemeenschappelijke uitwendige raaklijn getrokken. Als deze met de verbindingslijn der middelpunten een hoek maakt, waarvan de cotangens 2,4 is,

a. hoe groot is dan de afstand der raakpunten A en B en de afstand der middelpunten M en N,

b. hoe groot zijn sinus, cosinus, tangens en cotangens van de

hoeken, die de raaklijn maakt met de verbindingslijnen van het midden van AB met M en N?

66. Bewijs:

a. $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}\alpha}$,

b. $\sin\alpha\cos\alpha + \cot\alpha\cos^2\alpha = \cot\alpha$.

67. In den rechthoekigen $\triangle$ ABC (rechthoekig in A) wordt de bissectrix CD $= p$, die met CA een hoek ACD $=$ H maakt, door de hoogtelijn AE gesneden in F. Druk in deze gegevens uit: AC, AD, CE, AB, AE, EB, CF.

68. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{\sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$, *b.* $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

69. Bewijs:

a. $\dfrac{1 - \sin^3\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha + \cos^2\alpha} = 2 + \sin\alpha - \cos^2\alpha$,

b. $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \cos^2\alpha}{1 + \sin\alpha} = 2 - \sin\alpha - \cos^2\alpha$.

70. Het verschil van de vierde machten van sinus en cosimus van een hoek is $\dfrac{2 - a}{1 + a} \times$ zoo groot als de som van de kwadraten van sinus en cosinus van dien hoek. Bepaal den sinus van dien hoek.

71. Bewijs:

a. $\sin^2(60^\circ - \alpha) - \sin^2\alpha + \sin^2(30^\circ + \alpha) = \cos^2\alpha$,

b. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{2}{2\sin^2\alpha - 1}$.

72. De cosimus van een hoek, dien een koorde $= \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ van een cirkel met de raaklijn in haar uiteinde maakt, is $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Bereken:

a. den straal van den cirkel.

b. den sinus van den middelpuntshoek, die bij de koorde behoort.

73. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{1 - \sin^2\alpha - \sin\alpha + \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos\alpha\,\sin\alpha}$,

b. $\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}$.

§ 4. Stompe hoeken.

Theorie.

Volgens de definitie (zie § 1) is den stompen hoek A′OB (Fig. 10)

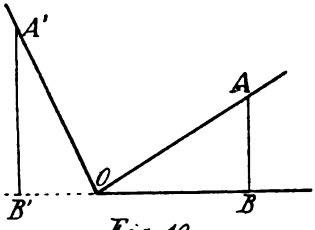


Fig. 10.

$$\sin A'OB = \frac{A'B'}{OA'}.$$

Hierin heeft A′B′ hetzelfde teeken als AB, d.i. A′B′ is positief, omdat wij bij een scherpen hoek AOB AB ook positief genomen hebben; — OA′ is evenals OA positief, omdat bij de draaiing van het been OA om O het stuk OA vanzelf in den stand OA′ komt. *De sinus van een scherpen hoek is dus positief.*

Volgens de definitie is ook (Fig. 10)

$$\cos A'OB = \frac{OB'}{OA'}.$$

Hierin heeft OB′ het tegengestelde teeken van OB. Daar wij bij een scherpen hoek AOB OB positief genomen hebben, moet OB′ als negatief beschouwd worden. Dus is $\frac{OB'}{OA'}$ ook negatief.

De cosinus van een stompen hoek is dus negatief.

Verder is volgens de definitie (zie § 2) (Fig. 10)

$$\text{tg } A'OB = \frac{A'B'}{OB'}$$

$$\text{en } \cot A'OB = \frac{OB'}{A'B'}.$$

Hierin is A′B′ positief, OB′ negatief (zie boven). De beide verhoudingen zijn dus negatief.

De tangens en de cotangens van een stompen hoek zijn negatief.

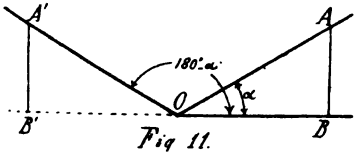


Fig 11.

Wanneer (Fig. 11) ∠ AOB $\doteq \alpha$ en ∠ A′OB = 180° — α is, is ∠ A′OB′ = α. Hieruit volgt, als men OA′ = OA neemt, waardoor ook A′B′ = AB en B′O = OB is,

$$\sin A'OB = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA} = \sin AOB.$$

of

$$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha} \quad \text{(Form. 15)}$$

en $$\cos A'OB = \frac{OB'}{OA'} = -\frac{OB}{OA} = -\cos AOB.$$

of $$\boxed{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha} \quad \text{(Form. 16)}$$

Verder (Fig. 11)

$$\text{tg } A'OB = \frac{A'B'}{OB'} = -\frac{AB}{OB} = -\text{tg } AOB$$

of $$\boxed{\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha} \quad \text{(Form. 17)}$$

en $$\cot A'OB = \frac{OB'}{A'B'} = -\frac{OB}{AB} = -\cot AOB$$

of $$\boxed{\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha} \quad \text{(Form. 18).}$$

In woorden: De sinus van het supplement van een hoek is gelijk aan den sinus van dien hoek.

Cosinus, tangens en cotangens van het supplement van een hoek zijn gelijk aan het tegengestelde van cosinus, tangens en cotangens van dien hoek.

Vraagstukken.

74. Van een stompen hoek is de sinus $\frac{1}{5}$. Bepaal cosinus, tangens en cotangens van dien hoek.

75. Bepaal sinus, cosinus, tangens en cotangens van een hoek van:

a. 120°, *b.* 135°, *c.* 150°, *d.* 180°.

76. Van een stompen hoek is de sinus $\frac{144}{65}$ × zoo groot als het kwadraat van den tangens. Bepaal den cosinus van dien hoek.

77. Als gegeven is, dat de tangens van een stompen hoek 2 × zoo groot is als de cotangens, bepaal dan:

a. den tangens en den cotangens van dien hoek,

b. den sinus en den cosinus van dien hoek.

78. De som van sinus en cosinus van een hoek is $\frac{7}{23}$ van hun verschil. Bepaal van dien hoek:

a. sinus en cosinus, *b.* tangens en cotangens.

79. Van een stompen hoek is het kwadraat van de som van tangens en cotangens $2\frac{1}{24}$ meer dan het kwadraat van den cotangens. Bepaal van dien hoek:

a. tangens en cotangens, *b.* sinus en cosinus.

80. Van een gelijkbeenigen driehoek is de basis 312 en haar projectie op een been 288. Bereken de sinussen, cosinussen, tangenten en cotangenten van de hoeken van dien driehoek.

81. In een rechthoekig trapezium is de stompe hoek α en de insluitende zijden zijn beide b. Druk de zijden en de diagonalen van dit trapezium in deze gegevens uit.

82. In een driehoek is een stompe hoek $= \alpha$ en de projectie der insluitende zijden op elkaar zijn p en q.

Druk in deze gegevens uit:

a. de hoogtelijnen op de insluitende zijden,
b. de insluitende zijden,
c. de derde zijde.

83. Als van een parallelogram de oppervlakte I en de zijden a en b gegeven zijn, bepaal dan sinus, cosinus, tangens en cotangens van zijn hoeken.

---

84. Te bewijzen:

a. $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + \alpha)$,
b. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -1$,
c. $\sin^2(45^\circ - \alpha) + \cos^2(135^\circ + \alpha) = 1$,
d. $\dfrac{\sin^3(180^\circ - \alpha) - \cos^3(180^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha) + \cos\alpha} =$
$= 1 + \cos(180^\circ - \alpha)\cos(90^\circ - \alpha)$,
e. $\operatorname{tg}^2\alpha \cot\alpha \sin\alpha \cos\alpha - 1 = \cos\alpha \cos(180^\circ - \alpha)$.

85. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cos(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha)$,
b. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$,
c. $\cos\alpha \cos(180^\circ - \alpha) - \sin\alpha \sin(180^\circ - \alpha)$,
d. $\cos\alpha \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)\cot(90^\circ - \alpha)$,
e. $\cos(30^\circ - \alpha)\sin(150^\circ + \beta) + \sin(30^\circ - \beta)\cos(150^\circ - \alpha)$,

f. $\{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)\}^2 +$
$\{\sin(135° - \alpha) + \cos(135° - \alpha)\}^2$,

g. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}(180° - \alpha)}{\operatorname{tg}(90° - \alpha) - 1}$.

86. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, bewijs dan:

a. $\cot(\alpha + \beta) = -\cot\gamma$,

b. $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(\beta + \gamma)} = 1$,

c. $\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) + \cot(90° - \beta) = 0$,

d. $\sin(\alpha + \beta - 90°) = \cos\gamma$,

e. $\operatorname{tg}(\beta + \gamma)\operatorname{tg}(90° - \alpha) = -1$,

f. $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2\gamma = 1$.

---

§ 5. Tafels*) (zonder logarithmen).

Vraagstukken.

87. Bepaal de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek met een schuine zijde van 5 en een hoek van 31°.

88. Een rechthoekige driehoek heeft een hoek van 21° 15′. Bepaal:

a. de kleinste rechthoekszijde, als de grootste = 3 is,

b. de grootste rechthoekszijde, als de kleinste = 2 is.

89. Als in een rechthoekigen driehoek een hoek 63° 15′ en de aanliggende rechthoekszijde = 7 zijn, bepaal dan:

a. de projectie dezer rechthoekszijde op de schuine zijde,

b. de hoogtelijn op de schuine zijde,

c. de andere rechthoekszijde.

90. Van een rechthoekigen driehoek is een hoek 55° 45′ en de hoogtelijn op de schuine zijde 11. Bepaal:

a. de afstanden van het voetpunt dezer hoogtelijn tot de rechthoekszijden,

b. de schuine zijde.

91. Bepaal van een gelijkbeenigen driehoek met een been = 12 en een tophoek van 47° 30′ basis, hoogte en hoogte op het been.

---

*) Zie bijv. dr. B. Gonggrijp. Logarithmische en goniometrische tafels, uitgave B of D. (P. Noordhoff).

92. Bereken de hoeken van een ruit:
a. waarvan een zijde 10 en een diagonaal 7,8146 is,
b. waarvan de diagonalen 8 en 50,51 zijn.

93. Van een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde 12 en de hoogtelijn op de schuine zijde 5,90904. Bereken de hoeken en de andere rechthoekszijde van den driehoek.

94. In een rechthoekig trapezium met een hoek van 32° 15′ heeft de kortste diagonaal een lengte = 7 en staat loodrecht op het schuine been. Bereken de kortste drie zijden van dit trapezium.

95. In een gelijkbeenig trapezium zijn de evenwijdige zijden 25 en 15 en een hoek is 59° 30′. Bepaal de oppervlakte.

96. In een rechthoekigen driehoek is een hoek 51° 30′ en de bissectrix van dien hoek is 10. Bereken de overstaande rechthoekszijde.

97. Als gegeven zijn de schuine zijde = 2000 en een rechthoekszijde = 733 van een rechthoekigen driehoek, bepaal dan:
a. de hoeken van dien driehoek,
b. de andere rechthoekszijde.

98. Als gegeven zijn een rechthoekszijde = 250 en de hoogtelijn = 199 op de schuine zijde van een rechthoekigen driehoek, bepaal dan:
a. de hoeken van dien driehoek, *b.* de schuine zijde.

99. In een cirkel met een straal = 20 is een koorde = 37,8208 getrokken. Bepaal:
a. het aantal graden van den bij die koorde behoorenden boog,
b. de afstanden van het midden van dien boog tot de uiteinden der koorde.

---

§ 6. Secans en cosecans.

Theorie.

De *secans* van een hoek is het omgekeerde van den cosinus van dien hoek:

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}} \quad \text{(Form. 19).}$$

De *cosecans* van een hoek is het omgekeerde van den sinus van dien hoek:

$$\boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}} \quad \text{(Form. 20)}$$

Uit deze bepalingen volgt: $\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$ en $\operatorname{cosec} 0 = \frac{1}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \infty$, dus

$$\sec 0 = 1$$
$$\operatorname{cosec} 0 = \infty;$$

$\sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^0} = \infty$ en $\operatorname{cosec} 90^0 = \frac{1}{\sin 90^0} = \frac{1}{1} = 1$, dus

$$\sec 90^0 = \infty$$
$$\operatorname{cosec} 90^0 = 1.$$

Verder is $\operatorname{cosec}(90^0 - \alpha) = \frac{1}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$, dus

$$\boxed{\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha} \quad \text{(Form. 21).}$$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$, dus

$$\boxed{\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{(Form. 22).}$$

$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$, dus

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha} \quad \text{(Form. 23).}$$

$\sec(180^0 - \alpha) = \frac{1}{\cos(180^0 - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = -\frac{1}{\cos \alpha} = -\sec \alpha$, dus

$$\sec(180^0 - \alpha) = -\sec \alpha;$$

$\operatorname{cosec}(180^0 - \alpha) = \frac{1}{\sin(180^0 - \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$, dus

$$\operatorname{cosec}(180^0 - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Vraagstukken.

100. Bereken de overige 5 goniometrische verhoudingen van een hoek als gegeven is:

a. de cosinus $= -\frac{1}{3}$,

b. de sinus $= \frac{1}{5}$ (de hoek is stomp),

c. de secans $= 2$,

d. de cosecans $= a$ (de hoek is stomp).

101. *a.* Bereken de overige 5 goniometrische verhoudingen van een scherpen hoek, waarvan de tangens is $\frac{a}{b}$.

b. Eveneens van een hoek, waarvan de cotangens is $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

102. Bepaal secans en cosecans van een hoek van:

a. 30°, *b.* 45°, *c.* 60°, *d.* 120°, *e.* 135°, *f.* 150°, *g.* 180°.

103. Druk, door eerst sec α of cosec α te berekenen, cos α en sin α uit in:

a. tg α, *b.* cot α.

104. Bewijs:

a. $\frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, *b.* $\frac{\sec(90^\circ-\alpha)}{\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)} = \cot\alpha$,

c. $\sec\alpha\cos^3\alpha + \operatorname{cosec}\alpha\sin^3\alpha = 1$,

d. $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$,

e. $\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha = \cot\alpha\cos\alpha$,

f. $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$,

g. $\operatorname{cosec}\alpha\cos\alpha + \sec\alpha\sin\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\sec\alpha$.

105. Bewijs:

a. $(\sec^2\alpha - 1)\cot\alpha = \operatorname{tg}\alpha$,

b. $\frac{1+\cot^2\alpha}{\sec^2\alpha} = \cot^2\alpha$,

c. $(1+\sec(180^\circ-\alpha))^2-(1+\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha))^2 = 4\sec(180^\circ-\alpha)$,

d. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sec^3\alpha-\sec\alpha} = \cos\alpha$,

e. $\frac{\sqrt{\sec^2(90^\circ-\alpha)-1}}{\cot(90^\circ-\alpha)}-\cos^2(180^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}^2(90^\circ-\alpha)\sin^2(90^\circ-\alpha)$,

f. $\frac{\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha}{\cot^3\alpha+\cot\alpha} = \cos\alpha\sin^2\alpha$.

106. Schrijf in eenvoudiger vorm :

a. $\sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha \cot\alpha \sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha$,

b. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cot\alpha} \dfrac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$.

c. $\dfrac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cot\alpha}$, *d.* $\dfrac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha} \dfrac{\cot\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$,

e. $\sin^2(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$,

f. $(\operatorname{cosec}\beta - 1)(\operatorname{cosec}\beta + 1)$,

g. $\sin^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \cot^2\alpha + \cos^2\alpha$.

107. Schrijf in eenvoudiger vorm :

a. $\cot(90^\circ - \alpha)\cot\alpha - \cot(180^\circ - \alpha)\cot\alpha$,

b. $\dfrac{\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\cot(90^\circ - \alpha)$,

c. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\operatorname{tg}\alpha - \sec(90^\circ - \alpha)\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$,

d. $\cot(90^\circ - \alpha)\cot\alpha - \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \sec^2\alpha$,

e. $\operatorname{cosec}\alpha(\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha) - \cot^2\alpha$,

f. $1 + \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$,

g. $1 + \cos^2\alpha + \cot^2\alpha \cos^2\alpha$,

h. $\sec^2\alpha \cot^2\alpha - \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sec^2\alpha} - \cot^2\alpha$.

108. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \times \dfrac{1 + \sec\alpha}{1 + \operatorname{cosec}\alpha}$,

b. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$, *c.* $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha}{1 - \cot\alpha}$,

d. $\dfrac{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha \operatorname{cosec}\alpha}$,

e. $\left(\dfrac{1}{\sec\alpha + 1} + \dfrac{1}{\sec\alpha - 1}\right)\operatorname{tg}\alpha$,

f. $\left(\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha + 1}\right)\cot\alpha$,

g. $\sec^4 x(1 - \sin^4 x) - \operatorname{tg}^2 x$,

h. $\operatorname{cosec}^4 y(\sin^4 y - 1) + 2\cot^2 y$.

109. Gegeven zijn twee scherpe hoeken α en β en de kleinste

hoogtelijn h van een stomphoekigen driehoek. Bereken de zijden en de andere twee hoogtelijnen.

110. Druk, door middel van den basishoek α, de beenen en de hoogtelijnen van een gelijkbeenigen driehoek, alsmede de stukken, waarin de hoogtelijnen elkaar verdeelen, uit in de basis a.

111. Van een rechthoekig trapezium staan de diagonalen rechthoekig op elkaar. Druk, door middel van den hoek α, dien de kleinste diagonaal met het rechthoekige been maakt, alle zijden en diagonalen en de stukken der diagonalen uit in het rechthoekige been a.

112. De som van tangens en cotangens van een stompen hoek is $2\frac{1}{3}$ × begrepen op de som hunner derde machten. Bereken den secans van dien hoek.

113. Van een stompen hoek wordt het kwadraat van den secans $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ × zoo groot, als men het met 1 vermindert. Bereken den cosecans van dien hoek.

114. De cosecans van een scherpen hoek is gelijk aan het kwadraat van den cotangens. Bereken de 6 goniometrische verhoudingen van dien hoek.

§ 7. Herhaling 2.

115. Schrijf in eenvoudiger vorm:

$a.$ $\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} + \frac{1}{\sec\alpha - 1}\right) \operatorname{tg}\alpha,$

$b.$ $\left(\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}\right) \cot\alpha.$

116. Als het produkt van den secans en het kwadraat van den cotangens van een hoek $-\frac{15}{16}$ is, bereken dan den cosinus van dien hoek.

117. Bewijs:

$a.$ $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \operatorname{cosec}^2\alpha = \cos\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha\,(2\sin^3\alpha - \cos\alpha),$

b. $\dfrac{\sec^4\beta - \operatorname{tg}^4\beta}{\sec^2\beta\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^3\beta} + \cos(180^\circ - \beta)\sin(180^\circ - \beta) = \cos^2\beta\operatorname{tg}(90^\circ - \beta)$,

c. $\dfrac{\sin\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha}{\cos\alpha - \cot\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha\,(1 + \operatorname{cosec}\alpha)$.

118. In een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde $\frac{6250}{2567}$ × zoo groot als de hoogtelijn op de schuine zijde, terwijl de andere rechthoekszijde 25 cM. is. Bereken de hoeken en de eerstgenoemde rechthoekszijde.

119. Van een ruit is de zijde 20 en de oppervlakte 393,3. Bepaal: *a.* de hoeken, *b.* de diagonalen.

120. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $4\sin^2\alpha + (\cos\alpha - \sin^2\alpha\sec\alpha)^2$,

b. $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1 + \cos\alpha\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin\alpha\sin(180^\circ - \alpha)\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2(180^\circ - \alpha)}$,

121. Van een hoek is het quotient van zijn sinus en den secans van zijn complement $\sqrt{0,75}$. Bepaal den secans van zijn supplement.

122. Bewijs:

a. $\sec^2\alpha\sec^2(90^\circ - \alpha) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha))^2 = 4$,

b. $\left(1 - \dfrac{\cot\alpha - 1}{\cot\alpha + 1}\right) : \left(1 - \dfrac{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

123. Als van een gelijkbeenigen driehoek het been 5 en de tophoek 101° 30′ is, bepaal dan:

a. de oppervlakte, *b.* basis en hoogtelijn op de basis.

124. Druk in een rechthoekig trapezium, waarin het schuine been en de kleinste evenwijdige zijde gelijk zijn, in het rechthoekige been h en den stompen hoek α uit:

a. de drie overige zijden, *b.* de grootste diagonaal.

125. Ontbind in factoren:

a. $\cot^4\alpha - 3\operatorname{cosec}^2\alpha - 1$,

b. $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^4\alpha - 5\sin^3\alpha$,

c. $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \sec^2\alpha$,

d. $\cos\alpha - \cos^5\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

126. Bewijs:

a. $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha)) = \dfrac{(1 + \cos\alpha)^2}{\cos\alpha}$,

b. $\dfrac{(\cot^2\alpha - 1)^2}{\cot^2\alpha} = \dfrac{(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}$,

127. Druk in een vierhoek met twee overstaande rechte hoeken de zijden en de grootste diagonaal uit in een der zijden en in de hoeken, waarin de grootste diagonaal een der hoeken van den vierhoek verdeelt.

128. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 - \cos^4\alpha$,

b. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\sec^2\alpha + \sec^4\alpha$.

---

§ 8. Tafels *) (met logarithmen).

a. Zonder interpolatie.

129. Bereken de tweede rechthoekszijde en de hoogtelijn op de schuine zijde van een rechthoekigen driehoek, waarvan gegeven is, dat de grootste rechthoekszijde 0,0178 en de kleinste scherpe hoek 25° 43′ is.

130. Van een gelijkbeenigen driehoek is de hoogte 0,06089 en de tophoek 31° 30′. Bereken:

a. de basis, *b.* de hoogtelijn op het been.

131. In △ ABC maakt de hoogtelijn BD = 169 met de zijden AB en BC hoeken van 59° 55′ en 23° 5′. Bereken:

a. de zijde AC, *b.* de hoogtelijnen uit A en C.

132. Van een rechthoekigen driehoek is de grootste rechthoekszijde 15,237 en de kleinste hoek 30° 49′. Bereken de overige zijden en de hoogtelijn op de schuine zijde.

133. Bereken in een gelijkbeenigen driehoek met een basis = 25

---

*) Zie bijv. dr. B. Gonggrijp, Logarithmische en goniometrische tafels, uitgave B of D (P. Noordhoff).

en een tophoek = 50° 18′ het been en de projectie van het eene been op het andere.

---

134. Bereken de hoeken van een rechthoekigen driehoek, als zijn schuine zijde 48,902 en een der rechtshoekszijden 15,247 is.

135. In een rechthoekig trapezium is het schuine been 13,245, de grootste evenwijdige zijde 32,034 en de ingesloten hoek 60° 27′. Bereken:

a. de andere zijden,
b. de hoeken, die de grootste diagonaal met de vier zijden maakt.

136. Bereken de hoeken en zijden van een gelijkbeenig trapezium, waarvan de hoogte 0,7609 is en een diagonaal = 1,305 den scherpen hoek middendoor deelt.

137. In een ruit zijn de diagonalen 20,005 en 11,2187. Bepaal: *a.* de hoeken, *b.* de zijden.

138. Bereken de schuine zijde van een rechthoekigen driehoek, waarvan de rechthoekszijden 8,7060 en 17,2476 zijn.

139. In een gelijkbeenigen driehoek is het been 7,32 en de hoogtelijn op een been 5,632. Bepaal de basis en de hoogtelijn op de basis.

---

b. Met interpolatie.

140. Van een driehoek is een zijde a = 0,023905 KM. en een aanliggende hoek B = 66° 51′ 50″. Bereken de hoogtelijn op de zijde c en de projectie van a op c.

141. Een scherpen hoek van een rechthoekigen driehoek is 3° 5′ 40″ en de hoogtelijn op de schuine zijde 0,057 M. Bereken: *a.* de schuine zijde, *b.* de rechthoekszijden.

142. Bereken de zijden van een driehoek met een hoogtelijn = 7,0395, als de aanliggende hoeken van de zijde, waarop de hoogtelijn is neergelaten, zijn 119° 23′ 35″ en 27° 13′ 42.″

143. Van een driehoek is de zijde $b = \sqrt{2}$, $\angle$ A = 53° 21′ 40″, $\angle$ B = 33° 20′ 20.″ Bereken:

a. de hoogtelijn op c, *c.* de hoogtelijn op a,
b. de zijde a, *d.* de zijde c.

144. Bepaal de oppervlakte van:

a. een rechthoekigen driehoek met een schuine zijde = 12,359 M en een hoek = 29° 57′ 23,″

b. een parallelogram met twee zijden = 1,3897 HM en 0,6045 HM en een ingesloten hoek = 72° 23′ 47.″

---

145. Bereken de hoeken van een rechthoekigen driehoek met een schuine zijde van 5 cM en een rechthoekszijde van 4 cM, alsmede de deelen, waarin de zwaartelijn op deze rechthoekszijde een hoek van den driehoek verdeelt.

146. In een rechthoekig trapezium staat de kleinste diagonaal = 10,876 loodrecht op het schuine been = 5,234. Bereken de hoeken en de onbekende zijden van het trapezium.

147. Bereken het been van een gelijkbeenigen driehoek, als de basis $\sqrt[8]{128}$ en de hoogtelijn op de basis $\sqrt[6]{128}$ is.

148. Op het verlengde van een koorde AB = 15,3 van een cirkel (M) met een straal = 18,7 neemt men een stuk BC = 2,9 en trekt de raaklijn CD aan (M). Bereken:

a. ∠ CAM, *b.* ∠ MCD.

149. Bereken zijden en hoeken van een parallelogram met een oppervlakte van 400,73 cM², als een zijde = 16,35 cM loodrecht op een diagonaal staat.

150. Bereken de hoeken van een vierhoek, waarvan drie opeenvolgende zijden zijn 17,238; 25,897 en 24,380, als de hoek tusschen de eerste twee zijden en de overstaande hoek recht zijn.

---

§ 9. Meer hoeken.

Theorie.

I. Grondformules.

a. 1. *Sinus van de som van twee hoeken.*

Zij (Fig. 12) ∠ EOC = α en ∠ COA = β, dus ∠ AOB = $\alpha + \beta$.

Dan is $\sin(\alpha+\beta) = \sin AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{AD+DB}{OA} = \frac{AD+CE}{OA} = \frac{AC\cos\alpha + OC\sin\alpha}{OA}$

$= \frac{AC}{OA}\cos\alpha + \frac{OC}{OA}\sin\alpha = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha.$

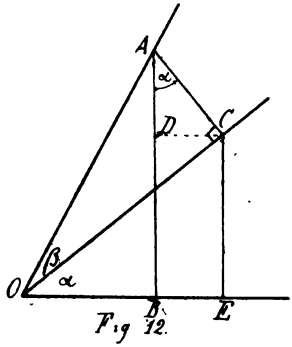


Fig 12.

Dus

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

(Form. 24.)

2. *Sinus van het verschil van twee hoeken.*

Zij (Fig. 13) $\angle$ EOC $= \alpha$ en $\angle$ COA $= \beta$, dus $\angle$ AOB $= \alpha - \beta$.

Dan is $\sin(\alpha-\beta) = \sin AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{DB-DA}{OA}$

$= \frac{CE-DA}{OA} = \frac{OC\sin\alpha - AC\cos\alpha}{OA} =$

$\frac{AC}{OA}\sin\alpha - \frac{AC}{OA}\cos\alpha = \cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha.$

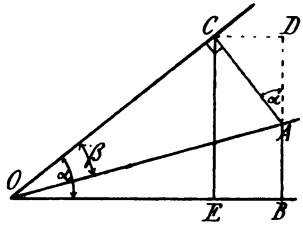


Fig. 13

Dus

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

(Form. 25)

3. *Cosinus van de som van twee hoeken.*

In Fig. 12 is $\cos(\alpha+\beta) = \frac{OB}{OA} = \frac{OE-BE}{OA}$

$= \frac{OE-CD}{OA} = \frac{OC\cos\alpha - AC\sin\alpha}{OA} =$

$\frac{OC}{OA}\cos\alpha - \frac{AC}{OA}\sin\alpha = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha.$

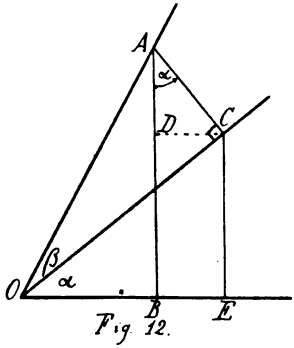


Fig 12.

Dus

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \alpha\sin\alpha\sin\beta}$$

(Form. 26)

4. *Cosinus van het verschil van twee hoeken.*

In Fig. 13 is $\cos(\alpha-\beta) = \frac{OB}{OA} = \frac{OE+EB}{OA} =$

$\frac{OE+CD}{OA} = \frac{OC\cos\alpha + AC\sin\alpha}{OA} = \frac{OC}{OA}\cos\alpha +$

$\frac{AC}{OA}\sin\alpha = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$

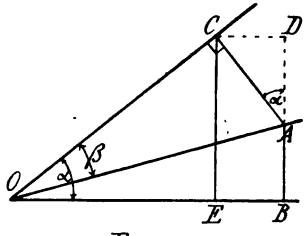


Fig 13

Dus

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

(Form. 27)

II. Afgeleide formules.

5. Is in form. (24) $\beta = \alpha$, dan vindt men

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}. \quad \text{(Form. 28)}$$

Eveneens uit form. (26) door $\beta = \alpha$:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}. \quad \text{(Form. 29a)}$$

De laatste formule kan herleid worden met het doel om $\cos 2\alpha$ enkel in $\cos \alpha$ of enkel in $\sin \alpha$ uitgedrukt te verkrijgen; het eerste door $\sin^2 \alpha$ te vervangen door $1 - \cos^2 \alpha$:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1}, \quad \text{(Form. 29b)}$$

het laatste door $\cos^2 \alpha$ te vervangen door $1 - \sin^2 \alpha$:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha} \quad \text{(Form. 29c)}$$

b. Lost men uit form. 29b, in den vorm $\cos p = 2 \cos^2 \frac{p}{2} - 1$ (als men $2\alpha = p$ stelt), $\cos \frac{p}{2}$ op: $\cos \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos p}{2}}$, en vervangt p weer door α, dan vindt men

$$\boxed{\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}. \quad \text{(Form. 30)}$$

Eveneens uit form. 29c

$$\boxed{\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}, \quad \text{(Form. 31)}$$

en, aangezien $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$, bij deeling van form. 31 door form. 30,

$$\boxed{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} \quad \text{(Form. 32)}$$

c. Deelt men de overeenkomstige leden van form. 24 en form. 26 door elkaar, dan krijgt men $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} =$ (teller en noemer deelen door $\cos \alpha \cos \beta$) $\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Dus

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}} \text{. (Form. 33)}$$

Eveneens bij deeling van form. 25 door form. 27:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}} \text{. (Form. 34)}$$

Stelt men in form. 33 $\beta = \alpha$, dan vindt men

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ (Form. 35)}$$

d. Door optelling van de formules 24 en 25 vindt men

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta,$$

of, als men $\alpha + \beta = p$ en $\alpha - \beta = q$ stelt, waardoor $\alpha = \frac{p+q}{2}$ en $\beta = \frac{p-q}{2}$ wordt,

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} \text{ (Form. 36)}$$

Hierdoor is de som van twee sinussen vervangen door een produkt.

Eveneens door aftrekking van form. 24 en 25:

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}} \text{ (Form. 37)}$$

Hierdoor is het verschil van twee sinussen vervangen door een produkt.

Door optelling van form. 26 en 27:

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} \text{ (Form. 38)}$$

Hierdoor is de som van twee cosinussen vervangen door een produkt.

Trekt men form. 26 van form. 27 af, dan vindt men

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta.$$

Stelt men hierin $\alpha - \beta = p$ en $\alpha + \beta = q$, waardoor $\alpha = \frac{p+q}{2}$ en $\beta = \frac{q-p}{2}$ wordt, dan vindt men

$$\boxed{\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}} \text{ (Form. 39)}$$

Hierdoor is het verschil van twee cosinussen vervangen door een produkt.

Vraagstukken.

a. $\sin(\alpha + \beta)$ enz.; $\sin 2\alpha$ enz.

151. Als $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ en $\sin\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ is, terwijl α scherp is en β stomp, bereken dan:

a. $\sin(\alpha + \beta)$, *b.* $\sin(\beta - \alpha)$, *c.* $\cos(\alpha + \beta)$, *d.* $\cos(\beta - \alpha)$.

152. Als $\cos^2 p = \frac{1}{25}$ en $\operatorname{cosec} q = \frac{9}{28}\sqrt{14}$ (p stomp en q scherp), bepaal dan:

a. $\cos(p + q)$, *b.* $\cos(p - q)$, *c.* $\sin(p + q)$, *d.* $\sin(p - q)$.

153. Als $\sin x = 0{,}6$ en $\sin y = 0{,}28$ (x en y beide scherp), bepaal dan hoeveel $\sin(x + y)$ minder is dan $\sin x + \sin y$.

154. Herleid, als $\alpha < 60°$ en $\beta > 135°$ is,

a. $\sin(\alpha + 90°)$, *d.* $\cos(\beta - 90°)$, *g.* $\cos(\alpha + 120°)$,
b. $\sin(\beta - 90°)$, *e.* $\sin(\alpha + 45°)$, *h.* $\cos(\beta - 135°)$.
c. $\cos(\alpha + 90°)$, *f.* $\sin(\beta - 60°)$,

155. Druk uit:

a. $\sin 3p$ in $\sin p$, *b.* $\cos 3p$ in $\cos p$.

156. Druk $\cos 4p$ uit:

a. in $\cos p$, *b.* in $\sin p$.

157. Druk uit:

a. de verhouding van $\sin 4p$ en $\cos p$, in $\sin p$;
b. de verhouding van $\sin 4p$ en $\sin p$, in $\cos p$.

158. Als $\cos(x + y) = \sin x$ en $\sin y = \frac{161}{287}$, bereken dan $\sin x$ en $\cos x$.

159. Bewijs:

a. $\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$,

b. $\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\beta = \dfrac{(\cos\alpha + \beta)}{\cos\beta}$,

c. $\sin\alpha + \cos\alpha \cot\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\beta}$,

d. $\operatorname{tg}\alpha \cos\beta - \sin\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}$.

e. $\sec\alpha \sin\alpha + \operatorname{cosec}\beta \cos\beta = \dfrac{\cos\alpha - \beta}{\cos\alpha \sin\beta}$,

f. $\sec\alpha \sin\alpha - \sec\beta \sin\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$,

g. $\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \cot\beta = 2 \cos(\alpha - \beta) \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec}\beta$,

h. $\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha \operatorname{tg}\beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \operatorname{cosec} 2\alpha \sec\beta$.

160. Bewijs:

a. $\sec\frac{1}{2}\alpha \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha = 2 \operatorname{cosec}\alpha$,

b. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos\alpha} = 2(1 + \cos\alpha)$,

c. $\dfrac{1 + \cos 4\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = 2(1 - \sin 2\alpha)$,

d. $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\alpha} = 2(\sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\beta)$,

e. $2 \cos\alpha \cot 2\alpha = \operatorname{cosec}\alpha \cos 2\alpha$.

161. Bewijs:

a. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$,

b. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$,

c. $\cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$,

d. $\cot\alpha - \cot\beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$,

e. $\operatorname{tg}\alpha + \cot\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \sin\beta}$,

f. $\cot\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$,

g. $\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha$,

h. $\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2 \cot 2\alpha$,

i. $\cos\alpha(\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha \cos 2\alpha$,

k. $\sin\alpha(\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = \sec\alpha \cos 2\alpha$.

162. Bewijs:

a. $\dfrac{1 + \cos^2 2\alpha}{2} = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$,

b. $\dfrac{(1 - \cos 2\alpha)(1 + \sec 2\alpha)}{4 \sec 2\alpha} = \sin^2\alpha \cos^2\alpha$,

c. $\sin^2 2\alpha = 4\cos^2\alpha - 4\cos^4\alpha = 4\sin^2\alpha - 4\sin^4\alpha.$

163. Bewijs:

a. $\dfrac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q} = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)},$

b. $\dfrac{\cot p + \operatorname{tg} q}{\cot p - \operatorname{tg} q} = \dfrac{\cos(p-q)}{\cos(p+q)},$

c. $\operatorname{tg}(p-q) + \operatorname{tg} q = \dfrac{\sin p}{\cos(p-q)\cos q},$

d. $\operatorname{tg}(\alpha + 30^\circ) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\sec(\alpha + 30^\circ)\sec\alpha,$

e. $\cot\beta - \cot 2\beta = \operatorname{cosec} 2\beta,$

f. $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\sec 2\alpha,$

g. $\cot 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha,$

h. $\operatorname{tg} 2\alpha + \cot\alpha = \cot\alpha\sec 2\alpha.$

164. Als gegeven is: te bewijzen:

a. $\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\beta,$ $\cos 2\alpha = 2\cos 2\beta + 1,$

b. $\cos\alpha = A\sin\beta,$ $\cos 2\alpha = A^2 - 1 - A^2\cos 2\beta,$

c. $\sec\alpha = 2\sec\beta,$ $\sec 2\alpha = \dfrac{4\sec 2\beta}{1 - 3\sec 2\beta},$

d. $\sec\alpha = A\operatorname{cosec}\beta,$ $\sec 2\alpha = \dfrac{A^2\sec 2\beta}{(1 - A^2)\sec 2\beta - 1}.$

165. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma + \sin(\beta-\gamma)\sin\alpha + \sin(\gamma-\alpha)\sin\beta,$

b. $\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma + \sin(\beta-\gamma)\cos\alpha - \cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,$

c. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$

d. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha - \cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)},$

e. $\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta,$

f. $\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\beta+\gamma)\cos\alpha,$

g. $\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma + \sin(\beta-\gamma)\cos\alpha.$

166. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)^2,$

b. $1 - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2,$

c. $2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha,$

d. $4\sin 1\frac{1}{2}\alpha\cos 1\frac{1}{2}\alpha\cos 3\alpha,$

e. $1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$

f. $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1},$

g. $\dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$,

h. $4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + \cos^2 4\alpha$.

i. $(\cos^2 \frac{1}{4}\alpha - \sin^2 \frac{1}{4}\alpha) \cos \frac{1}{4}\alpha \sin \frac{1}{4}\alpha$.

167. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$,

b. $(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)^2 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$,

c. $\dfrac{\cot \alpha}{\cot \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$,

d. $\dfrac{\sec \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\alpha}$,

e. $\dfrac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \dfrac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$,

f. $\cot \alpha (\sec 2\alpha - 1)$,

g. $2 (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)^2 - 1$,

h. $(\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \beta + \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \beta)(\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \beta - \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \beta)$,

i. $\dfrac{\cos \alpha}{\sin (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$,

k. $\dfrac{\sin^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos \alpha}$.

168. Schrijf als een produkt van twee sinussen:

a. $\frac{1}{2} \sin 84^\circ$, *c.* $\frac{1}{2} \sin \alpha$, *e.* $\frac{1}{2} \cos \alpha$.

b. $\frac{1}{2} \cos 43^\circ$, *d.* $\frac{1}{2} \sin (90^\circ + \alpha)$,

169. Schrijf als een produkt van twee cosinussen:

a. $\frac{1}{2} \sin 131^\circ$, *c.* $\frac{1}{2} \sin \alpha$, *e.* $\frac{1}{2} \cos \alpha$.

b. $\frac{1}{2} \cos 48^\circ$, *d.* $\frac{1}{2} \sin (60^\circ - \alpha)$,

170. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sin (a - b) \cos b + \cos (a - b) \sin b$,

b. $\sin (p + q + r) \sin (90^\circ - r) -$
$\sin (90^\circ - p - q - r) \sin (180^\circ - r)$,

c. $\sin (a + b + c) - \sin (a + b) \cos c$,

d. $\sin 5x - \sin 3x \cos 2x$,

e. $\cos 7x \cos 6x + 2 \sin 7x \sin 3x \cos 3x$,

f. $\cos 2x + 2 \sin \dfrac{3x}{2} \sin \dfrac{x}{2}$,

g. $\sin 3x - \cos 3x \operatorname{tg} x$.

b. $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$.

171. Verdrijf in de formule voor $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ den wortel uit
a. den noemer, *b.* den teller.

172. Bepaal:

a. $\operatorname{tg} 15°$,	*d.* $\cos 7° 30'$,	*g.* $\cos 27°$,
b. $\cos 75°$,	*e.* $\sin 7° 30'$,	*h.* $\sin 27°$,
c. $\sin 75°$,	*f.* $\operatorname{tg} 7° 30'$,	*i.* $\operatorname{tg} 27°$.

173. Als $\cos \alpha = 1 - 2a^2$, bereken dan
a. $\cos \frac{1}{4}\alpha$, *b.* $\sin \frac{1}{4}\alpha$, *c.* $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\alpha$, *d.* $\cot \frac{1}{4}\alpha$.

174. Als gegeven is $\sin \alpha = 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ en $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$, bepaal dan $\sin (\frac{1}{2}\alpha - 2\beta)$.

175. Druk uit in $\cos \alpha$:
a. $\sin \frac{1}{4}\alpha$, *b.* $\cos \frac{1}{4}\alpha$, *c.* $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\alpha$, *d.* $\cot \frac{1}{4}\alpha$.

176. Bewijs:
a. $\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin \alpha}$,
b. $\cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin \alpha}$,
c. $\sec \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha = 2\sqrt{\operatorname{cosec} \alpha (\operatorname{cosec} \alpha + 1)}$,
d. $\sec \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha = 2\sqrt{\operatorname{cosec} \alpha (\operatorname{cosec} \alpha - 1)}$.

177. Schrijf in eenvoudiger vorm:
a. $\dfrac{1 + \cos 2(\alpha + \beta)}{2}$,
b. $\frac{1}{2} \sec \alpha (\cos 2\alpha + 1)$,
c. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \alpha (1 - \cos 2\alpha)$,
d. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$,
e. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$,
f. $2(1 - \cos \alpha)(2\cos^2 \frac{1}{4}\alpha - 1)^2$,
g. $\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$,
h. $\dfrac{1 + \cos (\alpha - \beta)}{1 - \cos (\alpha - \beta)} \times \sin^4 \dfrac{\alpha - \beta}{2}$,
i. $1 - \cos 2(\alpha + \beta) + 2\sin^2 (90° - \alpha - \beta)$,

k. $(1 + \cos\alpha)^2 - 4\sin^4\frac{1}{2}\alpha$.

l. $2 - \sec^2\frac{1}{2}\alpha - \sec^2\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha$.

178. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sqrt{\dfrac{1 + 2\sin(45^\circ - \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)}{1 - 2\sin(45^\circ - \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)}}$,

b. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}$,

c. $\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}$,

d. $\sqrt{2 + \sqrt{2 - 2\cos\alpha}}$,

e. $\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2\cos\alpha}}$.

---

c. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

179. Bereken $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, als $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$ en $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$.

180. Bereken $\operatorname{tg}(p + q - r)$, als $\operatorname{tg} p = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} q = \frac{1}{4}$ en $\operatorname{tg} r = \frac{1}{7}$.

181. Van drie hoeken zijn de tangenten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{7}$. Bereken den tangens van hun som.

182. Als de tangenten van twee hoeken zijn $1 - \dfrac{1}{a}$ en $1 - \dfrac{1}{b}$, bepaal dan hoeveelmaal de tangens van hun som zoo groot is als de som hunner tangenten.

183. Als gegeven is $\operatorname{tg} x = 1 + a$ en $\operatorname{tg} y = 1 - a$, $(a < 1)$, bepaal dan of $x + y$ een scherpen of een stompen hoek voorstelt.

184. Druk $\operatorname{tg} 3\alpha$ uit in $\operatorname{tg}\alpha$.

185. Bepaal $\operatorname{tg}(45^\circ - p)$, als $\operatorname{tg} p = \dfrac{1 - a}{1 + a}$.

186. Als $\operatorname{tg}(45^\circ + p) = \sqrt{\dfrac{a + 1}{a - 1}}$, bepaal dan $\operatorname{tg} p$.

187. Als de tangens van het verschil van twee hoeken $1\frac{1}{5}$ en het verschil der tangenten -5 is, hoe groot is dan het produkt der tangenten?

188. Als de tangens van de som van twee hoeken — 1 en de som hunner tangenten $8\frac{1}{3}$ is, hoe groot zijn dan die tangenten ieder?

189. Bewijs:

a. $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + 1 = \dfrac{2}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$,

b. $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - 1 = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$,

c. $1 + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$,

d. $1 - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$,

e. $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2}$,

f. $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{(1 - \operatorname{tg}\alpha)^2}$,

g. $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$,

h. $\cot(45^\circ - \alpha) - \cot(45^\circ + \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

190. Bewijs:

a. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$,

b. $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = \dfrac{4 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha}$,

c. $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cot\alpha = \dfrac{2 \cot\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$,

d. $\cot^2\alpha - 1 = 2 \cot\alpha \cot 2\alpha$.

191. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cot(a + b) \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$,

b. $\operatorname{tg}(a - b) \dfrac{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$,

c. $\cot(a - b) \dfrac{(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)^2}{(1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)^2}$,

d. $\operatorname{tg}(a + b) \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}$,

e. $\dfrac{\cos a}{\cos a + \sin a} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} a}$,

f. $\dfrac{\cos 2a + \sin 2a}{\cos 2a - \sin 2a} - \dfrac{1 - \operatorname{tg} 2a}{1 + \operatorname{tg} 2a}$.

192. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}$,

b. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)}$,

c. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - 1}$,

d. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - 1}$.

193. In een enkele goniometrische verhouding te schrijven:

a. $\dfrac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$, *c.* $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$,

b. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$, *d.* $\dfrac{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}$.

---

d. $\sin p + \sin q$. enz.

194. Te bewijzen:

a. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

b. $\sin(120^\circ - \alpha) - \sin\alpha = \sin(60^\circ - \alpha)$,

c. $\cos\alpha + \cos(120^\circ - \alpha) = \cos(60^\circ - \alpha)$,

d. $\cos\alpha - \cos(60^\circ - \alpha) = \sin(30^\circ - \alpha)$.

195. In eenvoudiger vorm te schrijven:

a. $\sin(A + B) - \cos(90^\circ - A + B)$,

b. $\cos(A + B + C) + \cos(A + B - C)$,

c. $\frac{1}{4}\{\sin(B + 2A) + \sin(B - 2A)\} + \frac{1}{2}\sin B$,

d. $\{\cos(p - \frac{1}{2}q) - \cos(p + \frac{1}{2}q)\}\cos\frac{1}{2}q$.

196. Te bewijzen:

a. $\sin p + \sin 3p + \sin 5p + \sin 7p = 4\cos p\cos 2p\sin 4p$,

b. $\cos 2p - \cos 4p + \cos 6p - \cos 8p = 4\sin p\cos 2p\sin 5p$.

c. $\sin(x - 2y) - \sin(x - y) - \sin(x + y) + \sin(x + 2y)$
$= -4\sin x\sin\frac{1}{2}y\sin\frac{1}{2}y$,

d. $\cos(A - 2B) + 2\cos A + \cos(A + 2B) = 4\cos A\cos^2 B$.

197. In eenvoudiger vorm te schrijven:

a. $\dfrac{\sin 2p + \sin 2q}{\sin (p + q)}$, *b.* $\dfrac{\sin (p - q)}{\cos 2q - \cos 2p}$,

c. $\operatorname{tg} (p + q) \dfrac{\cos 2p + \cos 2q}{\cos 2p - \cos 2q}$.

198. Als één goniometrische verhouding te schrijven:

a. $\dfrac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$, *c.* $\dfrac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b}$,

b. $\dfrac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a}$, *d.* $\dfrac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b}$.

199. Te bewijzen:

a. $\sin (\alpha + 30^\circ) + \sin (\alpha + 150^\circ) + \sin (\alpha - 90^\circ) = 0$,
b. $\cos (\alpha - 10^\circ) + \cos (\alpha + 110^\circ) + \cos (\alpha - 130^\circ) = 0$,
c. $\cos (\alpha + 10^\circ) - \cos (\alpha + 70^\circ) - \cos (50^\circ - \alpha) = 0$.

200. Tot een produkt van twee goniometrische verhoudingen te herleiden:

a. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$, *c.* $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$,

b. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, *d.* $\dfrac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

---

e. Gemengd.

201. Druk uit:

a. $\cot (\alpha + \beta)$ in $\cot \alpha$ en $\cot \beta$, *c.* $\cot 2\alpha$ in $\cot \alpha$,
b. $\cot (\alpha - \beta)$ in $\cot \alpha$ en $\cot \beta$, *d.* $\cot \frac{1}{2}\alpha$ in $\cos \alpha$.

202. De sinus van een hoek is $a \times$ zoo groot als de sinus van de helft van dien hoek. Bereken den cosinus van dien hoek.

203. Te bewijzen:

a. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos 2\alpha \operatorname{cosec} \alpha$,

b. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta}{2} = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha$,

c. $\dfrac{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta}{2} = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$.

204. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta}$, *c.* $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\cos\gamma+\sin\gamma}{\cos\gamma-\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\sin\gamma}$.

b. $\dfrac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$,

205. Druk uit in $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

a. $\sin\alpha$. *b.* $\cos\alpha$, *c.* $\operatorname{tg}\alpha$, *d.* $\cot\alpha$, *e.* $\sec\alpha$, *f.* $\operatorname{cosec}\alpha$.

206. Als gegeven is $\operatorname{tg}\alpha = A\operatorname{tg}\beta$, bewijs dan:

a. $\sin 2\alpha = \dfrac{A\sin 2\beta}{A^2\sin^2\beta+\cos^2\beta}$,

b. $\cos 2\alpha = \dfrac{\cos^2\beta - A^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta + A^2\sin^2\beta}$.

207. Als gegeven is $\sin x = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ en $\sin y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, en x en y beide scherp zijn, bepaal dan of $x+y$ een stompe of een scherpe hoek is.

208. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$,

b. $(\operatorname{tg} 2b + \operatorname{tg} b)\cos 2b\cos b$,

c. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}-1\right):\sec\alpha\operatorname{cosec}\beta$,

d. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-1$,

e. $\dfrac{\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\beta\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\beta}$,

f. $\cos(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)$.

209. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha$,

b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$,

c. $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)}:(2-\sec^2(a+b))$,

d. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}\sec 2\alpha\operatorname{cosec}2\alpha$,

e. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin 2\alpha\sin 2\beta$,

f. $\sqrt{4\cos^2\alpha\cos^2\beta-2(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}$.

210. Te bewijzen:

a. $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\sin c \sin a} = 0,$

b. $\dfrac{\sin(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a-b)+\cos(a+b)} = \dfrac{\cos b + \sin b}{\cos b - \sin b}.$

211. Ontbind in goniometrische factoren:

a. $\sin 2\alpha$, *c.* $1 - \cos\alpha$, *e.* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$,
b. $\cos 2\alpha$, *d.* $1 - \sin\alpha$, *f.* $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)$.

212. Te bewijzen:

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1 + \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$,

b. $\dfrac{2\cos A - \cos(A-2B) - \cos(A+2B)}{2\cos A + \cos(A-2B) + \cos(A+2B)} = \operatorname{tg}^2 B,$

c. $\cos(60^\circ - p) + 1 - \cos(120^\circ - p) = 2\cos^2\dfrac{p}{2}.$

213. Bereken:

a. $2\sin(\alpha - \frac{1}{4}\beta)\cos(\alpha - \frac{1}{4}\beta)$, als gegeven is

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ en $\cos\beta = -\dfrac{7}{25}$,

b. $\cot(2\alpha + \frac{1}{2}\beta)\sin(2\alpha + \frac{1}{2}\beta)$, als gegeven is

$\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ en $\cos\beta = -\dfrac{119}{169}$.

214. Als $\alpha + \beta = 45^\circ$, bewijs dan:

a. $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \times \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = 1,$

b. $\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2} = \cos^2\beta,$

c. $\sin 4\alpha + \sin 4\beta = 2\cos(2\alpha - 2\beta),$

d. $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta = 2\operatorname{cosec} 4\alpha = 2\operatorname{cosec} 4\beta,$

e. $\operatorname{cosec} 2\beta = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

---

§ 10. Herhaling 3.

215. Als $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$ en $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, hoeveelmaal is dan $\cos(x-y)$ zoo groot als $\sin(x-y)$?

216. Bewijs:

a. $\operatorname{tg} p + 2 \sin p = \dfrac{2 \sin \frac{3}{2} p \cos \frac{1}{2} p}{\cos p}$,

b. $\sin (\alpha + 90^\circ - \beta) \cos (\alpha + 90^\circ - \beta) =$
$= \frac{1}{2} (\sin 2\beta \cos 2\alpha - \cos 2\beta \sin 2\alpha)$.

217. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $2 \cos^2 (p - 45^\circ) - \sin^2 (p + q) - \cos^2 (p + q)$,

b. $2 - \sec^2 \frac{1}{4}\alpha - \sec^2 \frac{1}{4}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$.

218. Als $\sin x$ $\sqrt{2}-1$ $\times$ zoo groot is als $\cos x$, hoeveelmaal is dan $\sin 2x$ zoo groot als $\cos 2x$?

219. Van een rechthoek zijn de zijden 3,89308 en 10,5326. Bereken den afstand van een hoekpunt tot een diagonaal.

220. Als $\sin x = \frac{1}{7}$ en $\sin y = \frac{2}{7}$, x een scherpe en y een stompe hoek is, bepaal dan hoeveelmaal $\sin (2y - 2x)$ zoo groot is als $\sin (y - x)$.

221. Bewijs:

a. $\sin^2 4x \cos^2 x - \cos^2 4x \sin^2 x = \sin 5x \sin 3x$,

b. $1 + \dfrac{\operatorname{tg} (90^\circ - p) - \operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} (90^\circ - p) \operatorname{tg} q} \sin (p + q) = 2 \cos^2 \dfrac{p + q}{2}$.

222. Schrijf als één goniometrische verhouding:

a. $1 - 16 \sin^2 \dfrac{x+y}{2} \cos^2 \dfrac{x+y}{2} \cos^2 (x + y) - \sin^2 (2x+2y)$,

b. $\dfrac{2 \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{b}{2}} : \left(2 - \sec^2 \left(a + \frac{b}{2}\right)\right)$.

223. Van een rechthoekigen driehoek is de oppervlakte 11,057 M² en een rechthoekszijde 9,258 M. Bepaal de hoeken en de schuine zijde.

224. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $1 - 2 \sin 2\alpha \sin 2\beta - 2 \sin^2 (\alpha - \beta)$,

b. $1 - \operatorname{cosec}^2 2\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{cosec}^2 2\alpha$.

225. Als gegeven is $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ en $2\sqrt{3}\cot(90° - \beta) = 3$, bepaal dan $\cot(\alpha - \beta)$.

226. Als gegeven is $\cot 4x = -1{,}05$, bepaal dan $\operatorname{tg} 2x$.

227. Schrijf als één goniometrische verhouding:

a. $\operatorname{tg}^2\beta + 2\cos^2 3\alpha - \sec^2\beta$,

b. $\dfrac{\sin\alpha + \cos(90° - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}$.

228. Bereken de oppervlakte van een ruit met een langste diagonaal van $\sqrt{2}$ en een hoek van 50° 30′ 40″.

B. Trigonometrie.

§ 11. Trigonometrie.

Theorie.

a. Sinusregel.

In den willekeurigen △ ABC (Fig. 14), waarin BC = a, CA = b, AB = c, ∠ CAB = α, ∠ B = β en ∠ C = γ is, is de hoogtelijn

$$AD = c \sin\beta.$$

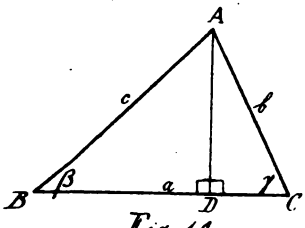


Fig. 14

Maar ook is $AD = b \sin\gamma$.
Hieruit volgt $c \sin\beta = b \sin\gamma$
of $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$.
Op dezelfde wijze vindt men $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$.

Dus

$$\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$$

(Form. 40)

(*Sinusregel.*)

Door den sinusregel is het mogelijk:

1. om van een driehoek, waarvan twee hoeken β en γ en de zijde b tegenover een dezer hoeken gegeven zijn, de andere elementen te berekenen. Want volgens den sinusregel is

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \times b$$

of

$$\log c = \log\sin\gamma - \log\sin\beta + \log b.$$

Ook is dan de derde hoek van den driehoek, $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$ bekend; dus kan men ook a berekenen:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \times b$$

of $$\log a = \log \sin \alpha - \log \sin \beta + \log b.$$

2. om van een driehoek, waarvan een zijde a en de aanliggende hoeken β en γ gegeven zijn, de andere elementen te berekenen. Want dan is ook $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$ bekend en men heeft hetzelfde geval als 1.

3. om van een driehoek, waarvan 2 zijden b en c en een hoek β tegenover een dezer zijden gegeven zijn, de andere elementen te berekenen. Want volgens den sinusregel is

$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta \qquad (1)$$

of $$\log \sin \gamma = \log c - \log b + \log \sin \beta;$$

hierdoor kan men γ berekenen, en men heeft weer geval 1.

In sommige gevallen vindt men uit de verg. (1) voor hoek γ twee waarden, die elkaars supplement zijn; dit hangt af van de grootte der gegevens.

---

b. Cosinusregel.

In $\triangle$ ABC (Fig. 15) is volgens de projectiestelling

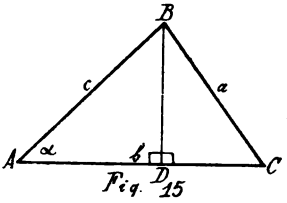


Fig. 15

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2\,AC \times AD.$$

Hierin is $AD = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$; dus

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

(Form. 41).

(*Cosinusregel*).

Was (Fig. 16) $\angle$ A stomp geweest, dan zou de projectiestelling geluid hebben

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 + 2\,AC \times AD.$$

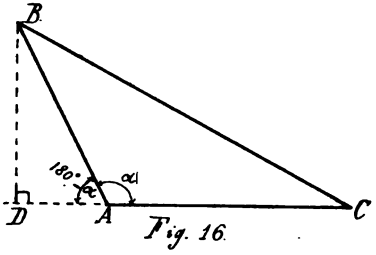


Fig. 16

Hierin is $AD = AB \cos BAD = AB \cos (180° - \alpha) = -c \cos \alpha$; dus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha.$$

De cosinusregel blijft dus onveranderd.

c. Tangensregel.

Door den cosinusregel is het mogelijk, uit twee zijden en den ingesloten hoek van een driehoek de derde zijde te berekenen. Hij is echter niet geschikt voor berekening met logarithmen. Daarom gaat men in dat geval te werk als volgt.

Volgens den sinusregel is

$$\sin \beta : \sin \gamma = b : c.$$

Dus $$(\sin \beta + \sin \gamma) : (\sin \beta - \sin \gamma) = (b + c) : (b - c)$$

of $$\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\sin \beta - \sin \gamma} = \frac{b + c}{b - c}.$$

Volgens form. 36 en 37:

$$\frac{2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

of

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

Dus

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2} = (b-c) : (b+c)} \quad \text{(Form. 42)}$$

(*tangensregel*). Soortgelijk voor andere zijden en hoeken.

Zijn nu b, c en α gegeven, dan kent men ook $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, dus dan is volgens den tangensregel

$$\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}$$

bekend, waardoor men $\frac{\beta-\gamma}{2}$ langs logarithmischen weg kan bepalen. Als $\frac{\beta+\gamma}{2}$ en $\frac{\beta-\gamma}{2}$ bekend zijn, zijn ook β en γ bekend (optelling en aftrekking), en de derde zijde wordt gevonden door den sinusregel.

d. Formules.

Door den cosinusregel is het ook nog mogelijk, bij gegeven zijden de hoeken van een driehoek te berekenen. Door oplossing van $\cos \alpha$ uit form. 41 vindt men nl.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Deze formule is echter niet geschikt voor logarithmische berekening. Beter formules verkrijgt men, door uit de gevonden formules voor $\cos \alpha$ waarden af te leiden voor $\cos \frac{1}{2} \alpha$, $\sin \frac{1}{2} \alpha$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, volgens de formules 30 en 31.

Men zal dan vinden

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{2\,s.\,2\,(s-a)}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}},$$

dus

$$\boxed{\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}} \quad \text{(Form. 43)}$$

en

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4\,bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{2\,(s-c).2\,(s-b)}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)\,s-c)}{bc}},$$

dus

$$\boxed{\sin \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}} \qquad \text{(Form. 44)}$$

en bij deeling van form. 44 door form. 43

$$\boxed{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}} \qquad \text{(Form. 45)}$$

Soortgelijk voor de andere hoeken.

Van deze formules is de laatste het meest geschikt voor de berekening van de 3 hoeken van een driehoek.

Vraagstukken.

a. Sinusregel.

229. Bereken de onbekende elementen van een driehoek, als gegeven zijn:

a. $a = 178,\ \alpha = 37^\circ\,13',\ \gamma = 46^\circ\,25'',$

b. $b = 23\frac{1}{3},\ \beta = 72^\circ\,13'\,10'',\ \alpha = 25^\circ\,7'\,8'',$

c. $c = 2\sqrt{3},\ \beta = 109^\circ\,33'\,52''.\ \gamma = 10^\circ\,26'\,8''.$

230. Bereken de onbekende elementen van een driehoek, als gegeven zijn:

a. $c = 0{,}015\,;\ \alpha = 43^\circ\,13'\,25'',\ \beta = 61^\circ\,18'\,5'',$

b. $a = 2\frac{6}{47},\ \beta = 32^\circ\,23'\,14'',\ \gamma = 16^\circ\,36'\,21'',$

c. $b = \sqrt[3]{100},\ \gamma = 125^\circ\,37'\,10'',\ \alpha = 30^\circ\,42'\,50''.$

231. Van een driehoek zijn twee hoeken $59^\circ\,13'\,24''$ en $51^\circ\,12'\,15''$, terwijl de bissectrix van den eersten hoek is 15,098. Bereken de zijden.

232. Bereken de onbekende elementen van een driehoek, als gegeven zijn:

a. $a = 100{,}18\,;\ b = 200,\ \beta = 130^\circ\,59'\,40'',$

b. $b = 270\,;\ c = 273,\ \beta = 60^\circ\,15'\,21'',$

c. $a = 10\,;\ c = 15{,}004,\ \gamma = 29^\circ\,13'\,15'',$

d. $a = \sqrt{10}\,;\ b = \sqrt{15},\ d = 45^\circ.$

233. Als van een parallelogram gegeven zijn een zijde = 1,329, een diagonaal = 1,239 en een hoek = 22° 3′ 45″, bereken dan de andere zijde.

234. In een rechthoekig trapezium maakt de kleinste diagonaal = 15,203 hoeken = 57° 13′ 10″ met de evenwijdige zijden, en het schuine been is 13. Bereken de drie andere zijden.

235. In een parallelogram verdeelt de diagonaal d den hoek tusschen de zijden a en b in de hoeken A_1 en A_2. Bewijs:

$$d : a : b = \sin (A_1 + A_2) : \sin A_2 : \sin A_1.$$

236. Als de rechte AD in △ ABC de overstaande zijde CB in D ontmoet, en ∠ CAD = α_1, ∠ DAB = α_2 is, bewijs dan:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sin \alpha_2 \sin \gamma}{\sin \alpha_1 \sin \beta}.$$

Wat volgt hieruit, als AD bissectrix is; wat, als zij zwaartelijn is?

237. Als de diagonaal BD van een gelijkbeenig trapezium hoeken α en γ met de beenen AD en BC maakt en AB = e_1, CD = e_2 is, bewijs dan:

$$e_1 \sin \gamma = e_2 \sin \alpha.$$

---

b. Cosinusregel.

238. In een driehoek zijn twee zijden 5 en 4 en de ingesloten hoek is 30° 45′. Bereken de derde zijde.

239. Bereken de onbekende elementen van een driehoek, als gegeven zijn:

a. $b = 8,\ c = 5,\ \alpha = 60°$;

b. $a = 2,\ c = 3\sqrt{3},\ \beta = 150°$,

c. $a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{1\frac{1}{3}},\ \gamma = 98°$.

240. In een parallelogram zijn de diagonalen 20 en 10 en maken een hoek van 119° met elkaar. Bereken de zijden.

241. Druk in een parallelogram

a. de diagonalen uit in twee opeenvolgende zijden en den ingesloten hoek,

b. de zijden uit in de diagonalen en een der hoeken van de diagonalen.

242. Druk de zwaartelijn op een zijde van een driehoek uit in de beide andere zijden en den door die zijden ingesloten hoek.

243. Bewijs, dat in een driehoek

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\,bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b - c)^2 + 4\,bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

244. Bewijs, dat als in een driehoek met twee zijden a en b de ingesloten hoek C toeneemt met P, dat dan het kwadraat van de tegenover dezen hoek staande zijde toeneemt met

$$4\,a\,b\sin\frac{P}{2}\sin\left(C + \frac{P}{2}\right).$$

245. Als in een vierhoek met de zijden a, b, c en d de hoeken tusschen a en b en tusschen c en d beide $= C$ zijn, bewijs dan

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\,(a\,b - c\,d)\cos C.$$

246. Als in $\triangle$ ABC de zwaartelijn z_b uit B met de zijde b den scherpen hoek H maakt, en $a < c$ is, bewijs dan:

a. $c^2 - z^2_b - \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - a^2 + z^2_b = b\,z_b\cos H$,

b. $a^2 - z^2_b = \frac{3}{4}b^2 - b\,c\cos\alpha$.

c. Tangensregel.

247. Van een driehoek de onbekende elementen te berekenen, als gegeven zijn:

a. $a = 13{,}5078$; $c = 12{,}304$ en $\beta = 30°\,17'$,

b. $a = 0{,}03597$; $b = 0{,}1045$ en $\gamma = 92°\,13'\,48''$,

c. $b = 105{,}9$; $c = 106{,}9$ en $\alpha = 135°$,

d. $a = \sqrt{2{,}5} + 0{,}5$; $b = \sqrt{2{,}5} - 0{,}5$ en $\alpha - \beta = 90°$.

248. De beenen van een trapezium zijn 7,809 en 13,809, en hun verlengden snijden elkaar onder een hoek van 70° 13′ 26″. Bereken de hoeken van dit trapezium.

249. Van een gelijkbeenig trapezium is een evenwijdige zijde 0,2345 en een been 1,0407 en de ingesloten hoek is 130° 18″. Bereken den hoek, waaronder de diagonalen elkaar snijden.

250. In een driehoek is een zijde 13,579 cM; een andere zijde is $1\frac{2}{19} \times$ zoo groot en de ingesloten hoek is 53° 7′ 49″. Bereken de andere hoeken.

251. In een drieboek is de cosinus van een hoek 0,6 en de verhouding der insluitende zijden 2 : 3. Bereken de twee andere hoeken.

252. Van een trapezium verhouden zich de grootste evenwijdige zijde en de diagonalen als 5 : 4 : 6; de hoek der diagonalen is 120°. Bereken de hoeken van het trapezium.

253. Als de bissectrix van ∠ A in △ ABC de overstaande zijde a in de stukken a_1 en a_2 verdeelt, bewijs dan

$$\frac{a_1 - a_2}{a} = \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

254. Bewijs, dat als de bissectrix van ∠ A in △ ABC met de overstaande zijde een (stompen of scherpen) hoek D maakt,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{2D + A}{4}}{\operatorname{tg} \frac{2D - A}{4}} = \frac{s}{s - a}$$

is.

255. Te bewijzen:

a. als in △ ABC ∠ A = 135° — φ en ∠ B = 45°—3 φ is:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{(1 - \operatorname{tg} \varphi)^2} = \frac{a - b}{a + b};$$

b. als in △ ABC ∠ A = 135° — 3 φ en ∠ B = 45°—φ is:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} = \frac{a - b}{a + b}.$$

---

d. Formules.

256. Bereken de hoeken van een driehoek, als aangegeven zijn:

a. $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$;

b. $a = 2{,}607$; $b = 0{,}897$; $c = 1{,}982$;

c. de kleinste zijde = 0,0382; terwijl de zijden zich verbinden als 4 : 5 : 6.

257. Bereken den grootsten hoek van een driehoek met de zijden 28 ; $16 + \sqrt{9{,}023}$ en $16 - \sqrt{9{,}023}$.

258. Bereken de hoeken van een driehoek, als gegeven zijn de kleinste zijde = 24,8 ; de bissectrix van den grootsten hoek = 24,9 en het kleinste stuk, dat deze van de overstaande zijde afsnijdt = 24,7.

259. In een driehoek zijn twee zijden en een zwaartelijn, die van één hoekpunt uitgaan, achtereeenvolgens 4,508 ; 6,319 ; 5,1375. Bereken den door die zijden ingesloten hoek.

260. Te bewijzen :

a. $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$,

b. $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{-a+b+c}{a+b+c}$,

c. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{s-c}{s-b}$.

261. Te bewijzen:

a. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{s}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$,

b. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{s-a}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$,

c. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{s-b}{c}\cos\dfrac{\gamma}{2}$,

d. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{s-c}{s}\cos\dfrac{\gamma}{2}$,

e. $b\sec^2\dfrac{\beta}{2} : c\operatorname{cosec}^2\dfrac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} : \cot\dfrac{\gamma}{2}$.

262. Te bewijzen :

a. $a\cos^2\frac{1}{2}\beta + b\cos^2\frac{1}{2}\alpha = s$,

b. $a\sin^2\frac{1}{2}\beta + b\sin^2\frac{1}{2}\alpha = s - c$.

263. Te bewijzen:

a. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{c\sqrt{s-c}}{\sqrt{s(s-a)(s-b)}}$,

b. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{(a-b)\sqrt{s-c}}{\sqrt{s(s-a)(s-b)}}$,

c. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} = \frac{c\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$,

d. $\cot\frac{\alpha}{2} - \cot\frac{\beta}{2} = \frac{(b-a)\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

264. Te bewijzen:

a. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$

b. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{2\,s^2}{bc\,\sin\alpha} = \frac{2\,s^2}{ac\,\sin\beta} = \frac{2\,s^2}{bc\,\sin\alpha}$.

---

e. Gemengd.

265. Bereken de hoeken van een driehoek met de zijden $\sqrt{2}$; 2 en $\sqrt{3} - 1$.

266. Als gegeven is, dat een driehoek de zijden $p - q$, $p + q$ en r heeft, en de hoek P tegenover de zijde $p + q$ staat, bewijs dan $2\,(p-q)\,r\cos P = r^2 - 4\,pq$.

267. Te bewijzen, dat in een parallelogram met de zijden a en b, een hoek A en de diagonalen d_1 en d_2, waarvan d_2 tegenover $\angle$ A staat, terwijl de diagonalen met elkaar een hoek B maken, die tegenover de zijde b staat,

a. $d_1^2 - d_2^2 = 4\,ab\cos A$

en *b.* $a^2 - b^2 = d_1\,d_2\cos B$

is.

268. Te bewijzen in $\triangle$ ABC, waarin de zwaartelijn AD $= z$ $\angle$ BAC verdeelt in $\angle$ CAD $= \alpha_1$ en $\angle$ DAB $= \alpha_2$, terwijl $\angle$ ADB $= \varphi$ is:

a. $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = c : b$,

b. $b^2 - c^2 = 2\,az\cos\varphi$.

269. Te bewijzen in $\triangle$ ABC, waarin de willekeurige rechte AD $= p$ de overstaande zijde in de stukken CD $= a_1$ en

DB $= a_2$ en $\angle$ BAC in $\angle$ CAD $= \alpha_1$ en $\angle$ DAB$= \alpha_2$ verdeelt, terwijl $\angle$ ADB $= \varphi$ is:

$$a.\quad \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = \frac{a_1}{b} : \frac{a_2}{c},$$

$$b.\quad b^2 - c^2 = a\,(a_1 - a_2 + 2p\cos\varphi).$$

270. Van een trapezium is de eene evenwijdige zijde 587 en een been 1100,4; de ingesloten hoek is 110°15′56″. Als de tweede evenwijdige zijde $1\frac{1}{4} \times$ zoo groot is als het andere been, hoe groot zijn dan de hoeken van dat trapezium?

271. In een rechthoekigen driehoek met de schuine zijde c te bewijzen:

$$a.\quad \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{c-a}{c+a} = \frac{(c-a)^2}{b^2} = \frac{b^2}{(c+a)^2},$$

$$b.\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \frac{c-b}{a} = \frac{a}{c+b}.$$

272. Bereken de hoeken van een parallelogram, als gegeven zijn:
a. de diagonalen 8 en 4, en een zijde 5,
b. de diagonalen $6\sqrt{10} + 5$ en $\sqrt{10} - 5$, en een zijde 15.

273. In een driehoek met de zijden AB = 15, BC = 25, CA = 12, neemt men op het verlengde van CA een stuk AD = 18. Bereken $\angle$ BDA en den afstand van D tot CB.

274. Als in den gelijkbeenigen driehoek met een been $= b$, de basis $= a$ en de hoogtelijn op de basis $= h$, uit de uiteinden der basis gelijke stukken $= p$ op het eene en op het verlengde van het andere been genomen worden, en de verbindingslijn van de uiteinden dezer stukken met de beenen hoeken x en y maakt, bewijs dan:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{2ph}{ab}.$$

275, Als men in $\triangle$ ABC op het verlengde der zijde AB een stuk BD $= d$ neemt en D met C verbindt, waarbij $\angle$ BCD $= x$, $\angle$ BDC $= y$ en $\angle$ ACD $= z$ is, bewijs dan

$$a.\quad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{d-a}{d+a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

b. $\operatorname{tg} \frac{z-y}{2} = \frac{c+d-b}{c+d+b} \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{(s-b)\,(s-c)}}$,

c. $\operatorname{tg} \frac{z-y}{2} : \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{c+d-b}{c+d+b} \frac{d-a}{d+a} \frac{s}{s-c}$.

276. In een driehoek, waarin $\angle A - \angle B = 90°$ is, te bewijzen:

a. de cosinus van den derden hoek is gelijk aan het dubbele produkt van de sinussen der beide eerste hoeken,

b. $b : a = \operatorname{tg} B$,

c. $a^2 : b^2 = p : q$, als p en q de projecties van a en b op c zijn,

d. $\operatorname{tg} (B + 45°) = \frac{a+b}{a-b}$.

---

§ 12. Herhaling 4.

277. Als in een parallelogram met de zijden a en b en een diagonaal d

$$d^2 = a^2 + b^2 + 1\tfrac{1}{2}\, a \cdot b$$

is, hoe groot zijn dan de hoeken van dat parallelogram?

278. Van twee snijdende cirkels met de stralen $\sqrt{2}$ en $\sqrt{18}$ maken de raaklijnen in een der snijpunten een hoek van 65° 30′ met elkaar. Bereken den afstand der middelpunten.

279. Als in een driehoek

$$a = 1\tfrac{1}{2}\, b \sin\alpha$$

is, hoe groot is dan $\angle \beta$ van den driehoek?

280. In een driehoek is gegeven

$$s - c = \frac{a\,c}{2\,(s-a)} = \frac{4\,(s-a)\,(s-b)}{s}.$$

Bepaal de hoeken van dien driehoek.

281. In een driehoek met een hoek van 87° 43′ 16″ verdeelt de bissectrix van dezen hoek de overstaande zijde in stukken van 8 en 6. Bereken de bissectrix.

282. Bewijs:

a. $\frac{\cos\,(a+d) - \cos\,(b+d)}{\sin\,b - \sin\,a} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cos\,d + \sin\,d.$

b. $\dfrac{\cos(2b - c) + \cos(c - 2e)}{\sin b - \sin(b - 2e)} =$

$$= \cos(b - c) \cot e - \sin(b - c).$$

283. Bewijs, dat als in een driehoek

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 = 2\, b^2 c^2$$

is, deze driehoek een hoek van 45° of van 135° heeft.

284. Schrijf als één goniometrische verhouding:

$$\frac{\sin 2X - \sin 2Y}{\cos(90° - 2X + 2Y)} (\sin 2X + \sin 2Y).$$

285. In een gelijkbeenigen driehoek ABC, waarin ∠ A (basishoek) = 75° en AB (been) = 14,85, trekt men uit A een rechte AD = 7,5 naar het been BC. Bereken den afstand van D tot AB.

286. Bereken tg $(2\alpha + \beta)$, als $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ en $\cos 2\beta = \frac{9}{41}$ is.

287. Van een rechthoekig trapezium is de langste evenwijdige zijde 10, het schuine been $2\sqrt{10}$ en de kleinste diagonaal is 2 × zoo groot als het rechthoekige been. Bereken hoeken en onbekende zijden van dat trapezium.

288. Schrijf als een produkt van twee goniometrische verhoudingen:

a. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\beta)(2\cos^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha)$,

b. $\frac{1}{2}(\cos\beta - \cos 2\alpha \cos\beta) - \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta$.

289. In △ ABC met ∠ A = 65° 13′ 24″ maakt de bissectrix AD = 17,95 met de overstaande zijde een hoek ADB = 70° 22′ 12″. Bereken den afstand van B tot AD.

290. Bereken cosec 2α, als $\sec 4\alpha = 1\frac{1}{7}\sqrt{2} + 1\frac{4}{7}$.

291. In △ ABC met BC = 19,75 en ∠ C = 75° 13′ 14″ heeft C een afstand = 7,853 van de zwaartelijn uit A. Bereken de hoogtelijn uit A.

CURSUS II.

Herhaling en uitbreiding.
Toegepaste trigonometrie.
Goniometrische vergelijkingen.

C. HERHALING EN UITBREIDING.

§ 13. Kwadranten.

Theorie.

a. In het vorige hebben wij alleen scherpe en stompe hoeken beschouwd. Wij moeten nu verder gaan en zien, wat er met de goniometrische verhoudingen gebeurt, als wij den hoek grooter dan een stompen of kleiner dan een scherpen laten worden. In het eerste geval wordt hij inspringend, in het tweede geval negatief. Het duidelijkst stellen wij den hoek met zijn goniometrische verhoudingen voor, wanneer wij het eene been vast laten (van het hoekpunt uit in horizontale richting naar rechts) (het „vaste been"), en het andere been (het „bewegende been") van dezen beginstand uit in de eene of de andere richting laten draaien. Laten wij het draaien in de richting tegengesteld met de wijzers van het uurwerk, dan ontstaan eerst de scherpe, later de stompe en dan de inspringende hoeken; laten wij het draaien met het uurwerk mee, dan ontstaan de negatieve hoeken. Wij verdeelen deze draaiingen in vakken telkens van 90°, die wij *kwadranten* noemen. Zoo ontstaan scherpe hoeken, als het bewegende been in het „eerste kwadrant" beweegt, — stompe hoeken, als het in het „tweede kwadrant" beweegt, — inspringende hoeken van 180° tot 270°. als het in het „derde" en van 270° tot 360° als het in het „vierde" kwadrant beweegt*). Beweegt het in tegengestelde richting, dus in het „negatieve" kwadrant. dan ontstaan negatieve hoeken van 0° tot — 90°. Bij deze laatste hoeken doorloopt het bewegende been weer dezelfde standen als in het „vierde" kwadrant (maar in tegengestelde volgorde), — zooals het in het „vijfde" kwadrant weer dezelfde standen aanneemt als in het „eerste" (nu ook in dezelfde volgorde), enz. In het algemeen krijgt het bewegende been na 360° draaiing denzelfden stand terug, dien het eerst had, en dan zullen dus ook weer de goniometrische verhoudingen dezelfde waarden als eerst terugkrijgen.

Dus *hoeken, die 360° verschillen, hebben dezelfde goniometrische verhoudingen.*

*) Afkortend zegt men: scherpe hoeken liggen in het 1e kwadrant, stompe in het 2de, enz.

Vandaar de formules

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \cot\\ \sec\\ \mathrm{cosec}\end{matrix}\right\}(\alpha \pm k \times 360^\circ) = \left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \cot\\ \sec\\ \mathrm{cosec}\end{matrix}\right\}\alpha. \quad \text{(Form. 46)}$$

Voor de overige kwadranten onderzoeken wij de goniometrische verhoudingen afzonderlijk.

b. Sinus en cosinus. Zij (Fig. 17) OA het vaste, OB_1 het bewegende been, in verschillende standen: OB_1, OB_2, OB_3, OB_4. Bij het draaien van het bewegende been doorloopt het punt B daarvan, dat eerst in A lag, een cirkel met OA tot straal; de sinus van den veranderlijken hoek is, als $B_1C_1 \perp OA$, volgens de definitie steeds voorgesteld door

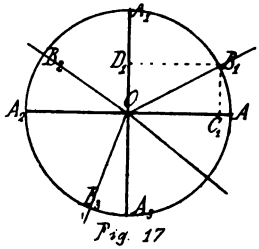


Fig. 17

$$\sin AOB_1 = \frac{C_1B_1}{OB_1},$$

waarin OB_1 wat teeken en grootte betreft standvastig is. Voor het teeken en de grootte van de goniometrische verhouding behoeven wij dus slechts op teeken en grootte van B_1C_1 te letten, evenals in

$$\cos AOB_1 = \frac{OC_1}{OB_1}$$

slechts op teeken en grootte van OC_1. Daarbij kan men nog, om alles op een standvastige lijn te meten, voor den sinus C_1B_1 overbrengen in OD_1, waardoor men krijgt

$$\sin AOB_1 = \frac{OD_1}{OB_1}$$

en men alleen de verandering in teeken en grootte van OD_1 behoeft na e gaan, zooals bij den cosinus die van OC_1.

Het teeken van OC_1 en OD_1 verandert alleen, wanneer die lijnen naar de tegengestelde zijde zouden komen, d.i. voor OC_1 (den cosinus) naar links, voor OD_1 (den sinus) naar beneden, dus als C_1 of D_1 het punt O eerst passeeren. Nu ziet men bij beide, dat het punt C_1 (of D_1) bij de beweging van het been OB_1 steeds gedurende twee kwadranten aan dezelfde zijde van O blijft: nl. het punt D_1 (voor den sinus), terwijl het punt B_1 van A uit over A_1 tot A_2 beweegt (dus in het 1e en 2de kwadrant), daarna weer (maar nu aan de benedenzijde van O), terwijl B van A_2 over A_3 tot A beweegt (dus in het 3e en 4e kwadrant), enz. En het punt C_1 (cosinus): terwijl B, komende uit het negatieve kwadrant, van A_3 over A naar A_1 gaat (dus in het negatieve en het eerste kwadrant), — en daarna weer (maar nu links van O), terwijl B van A_1 over A_2 naar A_3 gaat (dus in het 2e en 3e kwadrant), enz. De sinus is dus negatief in het negatieve kwadrant, positief in het 1e en 2e, negatief in het 3e en 4e, positief in het 5e en 6e, enz.; de cosinus positief

in het negatieve en het eerste, negatief in het 2e en 3e, positief in het 4e en 5e, enz. Dus:

Sinus en cosinus wisselen beide om de twee kwadranten van teeken; maar de teekenwisseling van den sinus begint tusschen het negatieve en het eerste en die van den cosinus tusschen het eerste en tweede kwadrant.

Verder geldt: *Wat absolute waarde betreft, zijn cosinus en sinus van hoeken, die samen 180° zijn, of die 180° verschillen, of die elkaars tegengestelde zijn, gelijk.*

Het eerste was reeds bekend; het laatste blijkt heel eenvoudig uit de figuur.

c. *Tangens en cotangens.* In Fig. 18 is

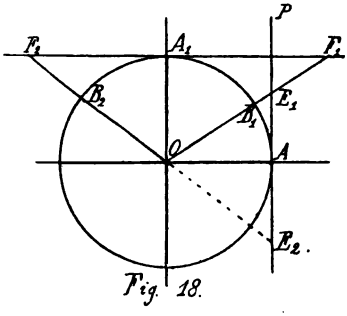


Fig. 18.

$$\text{tg } AOB_1 = \frac{AE_1}{OA},$$

als E_1 het punt is, waar het been OB_1 de raaklijn AP snijdt. Daar hierin OA standvastig is, is AE_1 een maat voor teeken en grootte van den tangens, waarbij het veranderlijke snijpunt E_1 tijdens de draaiing van het bewegende been OB_1 de raaklijn AP doorloopt. Komt E_1 boven A, dan is de tangens positief, beneden A, dan negatief.

In dezelfde figuur is $\cot AOB_1 = \frac{OA}{AE_1}$. Daar wij echter ook hier liever den noemer standvastig hebben, om door de waarde van den teller over die van den cotangens te kunnen oordeelen, vervangen wij deze verhouding door $\frac{A_1F_1}{OA_1}$, die eraan gelijk is ($\triangle OAE_1 \infty \triangle F_1A_1O$) en waarin OA_1 constant is; F_1 is dan het veranderlijke snijpunt van het bewegende been OB_1 met de vaste raaklijn A_1Q. Dus

$$\cot AOB_1 = \frac{A_1F_1}{OA_1}.$$

De cotangens is positief, als F_1 rechts van A_1 en negatief, als F_1 links van A_1 valt.

Nu kan uit de figuur afgeleid worden, dat telkens als het bewegende been een van de overgangsstanden OA_1, OA_2, OA_3 (zie Fig. 17) passeert, zoowel het punt E_1 als het punt F_1 naar de andere zijde van A of A_1 overgaat. Passeert het been OB_1 OA_1, dan gaat F_1 door A_1 van rechts naar links; de cotangens verandert dus van teeken. Het punt E_1 is op dat oogenblik naar het oneindige verdwenen (naar boven); als OB_1, een oogenblik daarna, den stand OA_1 gepasseerd is en dus bijv. OB_2 geworden is, moet zij door O verlengd worden om de raaklijn AP te snijden (in E_2); dan is dus

$$\text{tg } AOB_2 = \frac{AE_2}{OA}.$$

(Dit is ook nog in overeenstemming met de definitie, want nu is E_2 het willekeurige punt van het (verlengde) eene been, E_2A de loodlijn, OA de projectie door die loodlijn bepaald). Daar E_2 beneden A ligt, is de tangens

dus van teeken veranderd. Bij het passeeren van het been OB_1 door OA_1 en E_1 van $+\infty$ op $-\infty$ overgesprongen. Wij zeggen daarom

$$\text{tg } 90^\circ = \pm \infty ;$$

terwijl de cotangens door 0 naar negatief is gegaan:

$$\cot 90^\circ = 0.$$

Passeert het been OB_2 den stand OA_2, dan gebeurt iets dergelijks; alleen gaat nu juist punt E_2 door A weer naar boven (de tangens wordt weer, „door 0", positief), terwijl punt F_2 overspringt van oneindig ver links van A_1 ($-\infty$) tot oneindig ver rechts van A_1 ($+\infty$))als het been OB_2 na het passeeren van OA_2 weer door 0 verlengd wordt tot zijn snijding met A_1 Q): de cotangens wordt dus weer positief „door het oneindige heen":

$$\text{tg } 180^\circ = 0,$$

$$\cot 180^\circ = \mp \infty .$$

Enz. In ieder geval is het duidelijk, dat bij iederen voorbijgang van het bewegende been OB_1 door een der overgangsstanden OA, OA_1, OA_2 enz. de punten E en F beide aan de andere zijde van A of A_1 terecht komen, zooals wij boven beweerden. Dus:

Tangens en cotangens wisselen ieder kwadrant van teeken.

Verder geldt: *Wat absolute waarde betreft, zijn tangens en cotangens van hoeken, die samen 180° zijn, of die 180° verschillen, of die elkaars tegengestelde zijn, gelijk.*

Het eerste was weer bekend; het laatste volgt uit de beschouwing der figuur.

d. Uit de in *b* en *c* gegeven regels volgen nu de volgende formules, die door die regels vanzelf spreken.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	(Form. 47)
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	(Form. 48)
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	(Form. 49)
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	(Form. 50)

$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin\alpha$	(Form. 51)
$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos\alpha$	(Form. 52)
$\text{tg}(\alpha + 180^\circ) = \text{tg}\,\alpha$	(Form. 53)
$\cot(\alpha + 180^\circ) = \cot\alpha$	(Form. 54)

e. Daar het teeken van *secans* en *cosecans* onmiddellijk uit dat van cosinus en sinus wordt afgeleid (waarvan zij de omgekeerden zijn), behandelen wij die hier niet afzonderlijk. Natuurlijk is het teeken van den secans steeds gelijk aan dat van den cosinus, en het teeken van den cosecans steeds gelijk aan dat van den sinus.

Vraagstukken.

292. Maak een tabel voor alle 6 goniometrische verhoudingen voor de hoeken van 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°.

293. *a.* Welke goniometrische verhoudingen liggen altijd tusschen + 1 en — 1?
b. Welke zijn altijd kleiner dan — 1 of grooter dan + 1?
c. Welke kunnen alle mogelijke waarden aannemen?
d. Welke goniometrische verhouding is bij toenemenden hoek altijd toenemende (in algebraïsche waarde)?
e. Welke altijd afnemende?
f. Welke beurtelings af- en toenemende?

294. Bepaal alle hoeken tusschen — 90° en 450°:
a. waarvan de sinus $\frac{1}{2}$ is,
b. waarvan de cosinus $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ is,
c. waarvan de sinus $-\sqrt{0{,}75}$ is,
d. waarvan de tangens $\frac{1}{\sqrt{3}}$ is,
e. waarvan de cotangens — 1 is,
f. waarvan de cosecans ∞ is,
g. waarvan de secans 2 is.

295. Herleid tot goniometrische verhoudingen van positieve scherpe hoeken:

a sin 140°,	*i.* sin 300°,	*r.* cos (35° + 17 × 180°),
b. cos 129°,	*k.* cosec (— 70°),	*s.* sin (20 × 180° — 17°),
c. cot 170°,	*l.* tg 850°,	*t.* tg (31 × 90° + 153°),
d. cos (— 15°),	*m.* sin 490°,	*u.* cot (18° — 5 × 270°),
e. tg 91°,	*n.* sin (— 110°),	*v.* cos 35 × 180° : 6,
f. cot 240°,	*o.* sec (— 260°),	*w.* tg 73 × 90° : 2,
g. sec 220°,	*p.* cos 1000°,	*x.* cot 39 × 90° : 2,
h. cos 410°,	*q.* cot (— 200°),	*y.* sin 47 × 90° : 3.

296. Bepaal alle hoeken tusschen — 90° en 450°:
a. waarvan de sinus gelijk is aan cos 150°,
b. waarvan de tangens gelijk is aan cot 30°,
c. waarvan de cosinus gelijk is aan tg 45°,
d. waarvan de secans gelijk is aan cosec (— 30°).

297. Bepaal alle hoeken tusschen $-90°$ en $450°$:

a. waarvan de sinus gelijk is aan sin 47°,

b. waarvan de cosinus gelijk is aan sin 46°,

c. waarvan de secans gelijk is aan $\frac{1}{\cos 72°}$,

d. waarvan de cosecans gelijk is aan $\frac{1}{\sin 108°}$,

e. waarvan de tangens gelijk is aan cot 130°,

f. waarvan de sinus gelijk is aan $\frac{1}{\sec(-100°)}$.

298. Herleid tot goniometrische verhoudingen van α: alle goniometrische verhoudingen van:

a. $\alpha - 180°$,	*d.* $\alpha - 90°$,	*g.* $270° + \alpha$,
b. $-\alpha - 180°$,	*e.* $-\alpha - 90°$,	*h.* $\alpha - 270°$,
c. $90° + \alpha$,	*f.* $270° - \alpha$,	*i.* $\alpha - 450°$.

299. Herleid tot enkele goniometrische verhoudingen:

a. $\frac{\sin(-33°)}{\sin 57°}$,	*d.* tg 125° sin 35°,
b. cosec 404° cos 136°,	*e.* cosec 168° cot 78°,
c. $\frac{\sin 44°}{-\cos 44°}$,	*f.* tg 320° : cosec 130°.

300. Bepaal de onbekende goniometrische verhoudingen van een hoek x in het 4e kwadrant, als gegeven is:

a. $\cos x = \frac{5}{13}$, *b.* $\mathrm{tg}^2\, x = 2$, *c.* $\sec x = \frac{1}{\sqrt{2a - a^2}}$ $(2 > a > 0)$.

301. Als x een hoek is in het 3e kwadraat, en gegeven is

$$\frac{\mathrm{tg}\, x}{\cot x} = \frac{1 - a^2}{a^2} \quad (a \text{ positief}),$$

bepaal dan de 6 goniometrische verhoudingen van x.

302. Als x een hoek is in het 4e kwadrant, en gegeven is

$$\sec^2 x + \mathrm{tg}^2\, x = 2,$$

bepaal dan de 6 goniometrische verhoudingen van x.

303. Van een negatieven uitspringenden hoek is de tangens 2. Bepaal de 5 andere goniometrische verhoudingen.

304. Van een positieven hoek, kleiner dan 270°, is de sinus $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{4-4a}} - \sqrt{2+\sqrt{4-4a}}\right)$. Bepaal de 5 overige goniometrische verhoudingen.

305. Als de cotangens van een hoek, waarvan de helft een stompe hoek is, $-1\frac{1}{3}$ is, wat zijn dan de 5 overige goniometrische verhoudingen van dien hoek?

306. Als gegeven is

$$\sin(x-y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } \cos(x+y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

en x in het 3e, y in het 2e kwadraat ligt, bepaal dan x en y.

307. Als gegeven is

$$\cos^2\alpha = \frac{1-p}{2} \text{ en } \cos^2\beta = \frac{1+p}{2},$$

terwijl α in het 2e en β in het 3e kwadraat ligt, bepaal dan:
a. $\sin(\alpha+\beta)$, *b.* $\sin(\alpha-\beta)$, *c.* $\cos(\alpha+\beta)$, *d.* $\cos(\alpha-\beta)$.

308. Als gegeven is

$$\cos 2\alpha = \frac{1-p^4}{1+p^4} \text{ en } \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+q^4}},$$

terwijl α in het 3e en β in het 2e kwadraat ligt, bereken dan $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

---

§ 14. Goniometrie (Tweede reeks).

a. Definitie.

309. Druk in een gelijkbeenig trapezium, waarin de diagonalen rechthoekig op elkaar staan, door middel van den kleinsten hoek α, dien eén diagonaal met een been maakt, alle zijden uit:

a. in het been,
b. in het grootste stuk van de diagonaal,
c. in het kleinste stuk van de diagonaal,
d. in de grootste evenwijdige zijde,
e. in de kleinste evenwijdige zijde,
f. in de diagonaal.

310. In vierhoek ABCD, waarin de diagonalen AC en BD elkaar rechthoekig in E snijden, is $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ en $\angle DCA = \gamma$. Druk door middel van deze hoeken de zijden en de diagonalen van den vierhoek in $AE = p$ uit.

311. Breng de volgende meetkundige vergelijkingen in goniometrischen vorm:

a. $a^2_5 = a^2_6 + a^2_{10}$ *), *c.* $p_5 a_{10} = (\frac{1}{2} a_4)^2$,

b. $p_8 a_8 = a_6 p_4$, *d.* $2 p_5 - a_{10} = R$.

---

b. Eén hoek.

312. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1)^2$,

b. $\sin^6 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$,

c. $(\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha)(\operatorname{tg} \alpha \cos^4 \alpha + \cot \alpha \sin^4 \alpha)$,

d. $\dfrac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - (\cot \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2$.

313. Bewijs, dat uit

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

volgt

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

314. Bewijs:

a. $\dfrac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} = \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha$,

b. $\dfrac{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} = (\sec \alpha - 1)(1 - \operatorname{cosec} \alpha)$.

315. Als gegeven is, dat α en φ scherpe hoeken zijn, en

a. $1 - \sin 2\alpha - \sin 2\varphi + \sin 2\alpha \sin 2\varphi = 0$, bewijs dan, dat òf $\alpha = 45°$ òf $\varphi = 45°$ is;

b. $1 - 3 \cos 2\varphi + 2 \cos^2 2\varphi = 0$, bewijs dan, dat òf $\varphi = 0$ òf $\varphi = 30°$ is.

316. Als gegeven is, dat α en φ uitspringende hoeken zijn, en

$$1 - \operatorname{tg} 3\varphi = \operatorname{tg} 3\varphi \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha,$$

bewijs dan, dat óf $\varphi = 15°$, $75°$ of $135°$, óf $\alpha = 45°$, $105°$ of $165°$ is.

---

*) a_n is de zijde, R de straal, p_n het apothema van den regelmatigen n-hoek.

c. Meerhoeken.

317. Te bewijzen:

a. $\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = 2 \sec \alpha,$

b. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = 1 + \sec 2\gamma.$

318. Te bewijzen:

a. $(1 + \cos 4\alpha) \dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$

b. $1 - 2\cos^2(p + 90^\circ - q) = \sin 2p \sin 2q + \cos 2p \cos 2q.$

c. $1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2.$

319. Te bewijzen:

a. $\dfrac{\operatorname{tg} p \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg}^2 p - \operatorname{tg}^2 q} = \dfrac{\sin 2p \sin 2q}{4 \sin(p - q) \sin(p + q)}.$

b. $\dfrac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cot \alpha \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}.$

320. Te bewijzen:

a. $\sqrt{1 + (\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha)^2} = \pm \sec \dfrac{\alpha}{2},$

b. $\sqrt{1 + (\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha)^2} = \pm \operatorname{cosec} \dfrac{\alpha}{2},$

c. $\sqrt{1 + (\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2} = \pm \sec \left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right),$

d. $\sqrt{1 + (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)^2} = \pm \operatorname{cosec} \left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right).$

321. Te bewijzen:

a. $\sqrt{\dfrac{\cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta) + \sin \alpha (\sin \alpha + \sin \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)}} =$

$$= \pm \cot \frac{\alpha - \beta}{2},$$

b. $\sqrt{\dfrac{\cos \alpha (\cos \alpha - \cos \beta) + \sin \alpha (\sin \alpha + \sin \beta)}{2}} =$

$$= \pm \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

322. Bewijs:

a. $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) + \sin 60^\circ =$

$$= 2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha+60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-60^\circ}{2},$$

b. $\cos\alpha\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos\alpha\cos(\alpha - 60^\circ) -$

$$\cos(\alpha - 60^\circ)\cos(\alpha + 60^\circ) = \tfrac{3}{4}.$$

323. Bewijs:

a. $\cos x(\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cosec} 4x) = \cos 3x \operatorname{cosec} 4x,$

b. $\sin x(\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 4x) = \sin 3x \operatorname{cosec} 4x,$

c. $(\sec 4x - \sec 2x)\cot 2x = \sin 3x \sec x \sec 4x,$

d. $(\sec 3x - \sec x)\operatorname{cosec}^2 x = 4\sec 3x.$

324. Schrijf in eenvoudiger vorm:

$\cos(p - q - r) - \cos(p + q + r) + \cos(p - q + r) -$
$\cos(p + q - r).$

325. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)\sin\gamma}{\sin\beta\sin(\alpha - \gamma)} - 1,$ *c.* $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma}{\sin\beta\cos(\alpha + \gamma)} + 1,$

b. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)\cos\gamma}{\sin\beta\cos(\alpha + \gamma)} + 1,$ *d.* $1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\gamma - \alpha)\sin(\gamma - \beta)}.$

326. Ontbind in goniometrische factoren:

a. $\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta),$

b. $\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta),$

c. $\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta),$

d. $\cos\alpha(\sin\alpha + \sin\beta) + \sin\alpha(\cos\alpha + \cos\beta),$

e. $\cos\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin\alpha(\cos\alpha + \cos\beta),$

f. $\cos\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin\alpha(\cos\alpha - \cos\beta),$

g. $\cos\gamma(\cos\alpha + \cos\beta) + \sin\gamma(\sin\alpha + \sin\beta),$

h. $\cos\gamma(\cos\alpha - \cos\beta) - \sin\gamma(\sin\alpha - \sin\beta).$

327. Te bewijzen:

a. $\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\sin(\alpha + \beta),$

b. $\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)\sin\dfrac{\beta}{2} = \sin\alpha,$

c. $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right) + \cos(\alpha + \beta) = \cos\beta,$

d. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) =$
$= \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma - \sin\alpha\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\sin(\gamma-\alpha).$

328. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\sin a - \sin(a-b)\cos b,$

b. $\cos(2a+b) - \cos a\cos(a+b).$

329. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\gamma,$

b. $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\gamma,$

c. $\sin\alpha\cos\beta + \sin(\alpha-\gamma)\cos(\gamma-\beta) - \sin(\alpha+\beta-\gamma)\cos\gamma,$

d. $\sin\alpha\cos\beta + \sin(\alpha-\gamma)\cos(\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\gamma,$

e. $\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta-\gamma) - \cos(\alpha-\beta+\gamma)\cos\gamma.$

330. Te bewijzen:

a. $\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha) - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{1+\cos\alpha},$

b. $\left(1+\cot^2\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha) - 2\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{1-\cos\alpha}.$

331. Te bewijzen:

a. $\frac{2(1+\sin\alpha)}{1+\cos\alpha} = \left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2,$

b. $\frac{2(1+\sin\alpha)}{1-\cos\alpha} = \left(1+\cot\frac{\alpha}{2}\right)^2.$

332. Als gegeven is $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$ bewijs dan $A+B = 90°.$

333. *a.* Als gegeven is: $\operatorname{tg}\alpha = A\operatorname{tg}\beta,$

te bewijzen: $\cos 2\alpha - \cos 2\beta = \frac{1-A}{1+A}(1-\cos 2(\alpha+\beta)),$

b. Als gegeven is: $\operatorname{tg}\alpha = A\cot\beta.$

te bewijzen: $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{1-A}{1+A}(1+\cos 2(\alpha-\beta)).$

334. Als gegeven is $\operatorname{tg} x = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{\sin 2\alpha\sin 2\beta}},$ bepaal dan:

a. $\sin x$, *b.* $\cos x$.

335. Als gegeven is $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)}$, bepaal dan:

a. $\operatorname{tg}(45° - x)$, *b.* $\operatorname{tg} 2x$.

Identiteiten onder voorwaarden.

336. Als gegeven is $A + B + C = 90°$, te bewijzen:

a. $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1$,

b. $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$.

337. Als gegeven is $A + B + C = 90°$, te bewijzen:

a. $\cos^2 A + \sin A \cos B \cos C = 1 + \sin A \sin B \sin C$,

b. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \sec A \sec B \sec C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$,

c. $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B =$
$= 1 + \sin A \sin B \sin C$.

d. $\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B =$
$= \cos A \cos B \cos C$.

338. Als gegeven is $A + B + C = 180°$, schrijf dan in eenvoudiger vorm:

a. $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin C}$, *c.* $\sin A - \cos B \sin C$,

b. $\cos A + \cos B \cos C$, *d.* $\cos(2B + C) - 2 \sin A \sin B$.

339. Als gegeven is $A + B + C + 180°$, te bewijzen:
$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ (Eindex. H. B. S. 1897).

340. Te bewijzen, als $A + B + C = 180°$:

a. $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$, *b.* $\frac{\cot A - \operatorname{tg} B}{\cot C - \operatorname{tg} B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$,

c. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$,

d. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$,

341. Als gegeven is $A + B + C = 180°$, te bewijzen:

a. $\sin(A - 60°) + \sin(B - 60°) + \sin(C - 60°) =$
$= 4 \sin\left(30° - \frac{A}{2}\right) \sin\left(30° - \frac{B}{2}\right) \sin\left(30° - \frac{C}{2}\right)$,

b. $1 + \cos(A - 60^\circ) + \cos(B - 60^\circ) + \cos(C - 60^\circ) =$
$$= 4\cos\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{B}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right).$$

342. Als gegeven is $A + B + C = 180^\circ$, te bewijzen:
$$\cos\tfrac{1}{2}C(\sin A - \sin B) = \sin\tfrac{1}{2}C(\cos B - \cos A).$$

343. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, schrijf dan in eenvoudiger vorm:

a. $\dfrac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, *b.* $\dfrac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos\beta - \cos\gamma}\cot\dfrac{\alpha}{2}$,

c. $\sin(\alpha - \gamma)\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta + \sin(\alpha - \beta)\cos\gamma$.

344. Als van de hoeken α, β, γ van een driehoek gegeven is
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma = 1,$$
bewijs dan, dat de driehoek rechthoekig of gelijkbeenig is.

345. Als van de hoeken α, β, γ van een driehoek gegeven is
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
bewijs dan, dat de driehoek rechthoekig is.

346. Als gegeven is $A + B + C = 180^\circ$, te bewijzen:
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$ (Eindex. H. B. S. 1885).

347. Te bewijzen, als $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,
$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta}{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}.$$

348. Eveneens, als $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$,
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2(1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

349. Als gegeven is $A + B + C = 180^\circ$, te bewijzen:

a. $\cos\dfrac{A - B}{4} + \sin\dfrac{A + B}{4} = 2\cos\dfrac{B + C}{4}\cos\dfrac{C + A}{4}$,

b. $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} =$
$$= 4\cos\frac{B + C}{4}\cos\frac{C + A}{4}\cos\frac{A + B}{4}.$$

350. Als gegeven is
$$\sin\alpha(\cos\beta + \cos\gamma) = (\sin\beta + \sin\gamma)(1 - \cos\alpha),$$
en α, β en γ positieve uitspringende hoeken zijn, bewijs dan dat $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

351. Te bewijzen, als gegeven is $p + q + r = 0$,

$$\sin p + \sin q + \sin r = -4 \sin \frac{p}{2} \sin \frac{q}{2} \sin \frac{r}{2}.$$

352. Als gegeven is $A + B + C + D = 360°$, te bewijzen:

a. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D =$

$$= -4 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + C}{2} \cos \frac{A + D}{2} = \ldots.$$

b. $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D =$

$$= 4 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A + C}{2} \sin \frac{A + D}{2} = \ldots.$$

Vul de ontbrekende vormen der uitkomst zelf in.

---

353. Maak voor logarithmische berekening geschikt de vormen:

a. $2 \sin 2x + \sin 4x$,
b. $2 \sin 2x - \sin 4x$,
c. $1 + 2 \cos 2x + \cos 4x$,
d. $1 - 2 \cos 2x + \cos 4x$,
e. $\sin (2x + 2y) + \sin (2x - 2y) + \sin 4x$.

354. Maak voor logarithmische berekening geschikt de vormen:

a. $1 + 2 \cos \beta \cos \gamma + \cos 2\beta$,
b. $1 - 2 \cos \beta \cos \gamma + \cos 2\beta$,
c. $1 + 2 \sin \beta \sin \gamma - \cos 2\beta$,
d. $1 - 2 \sin \beta \sin \gamma - \cos 2\beta$,
e. $\sin \alpha - \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$,
f. $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$,
g. $\cos \alpha - \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$,
h. $\cos \alpha + \cos \beta - \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$.

355. Maak voor logarithmische berekening geschikt de vormen:

a. $\cos x + \sin x$,
b. $\cos x - \sin x$,
c. $\dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$,
d. $1 - \cos 4x + 2 \sin 2x$,
e. $-1 + \cos 4x + 2 \sin 2x$.
f. $1 + \sin 4x + 2 \sin (45° + 2x)$.

356. Maak voor logarithmische berekening geschikt de vormen:

a. $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x$,
b. $\cos x - \operatorname{tg} \alpha \sin x$,
c. $\sin p + \sqrt{3} \cos p$,
d. $\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x$.

357. Bereken $\sin^3\alpha - \sin^3\beta + \sin^2\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin^2\beta$, als $\alpha = 157° 29' 35''$ en $\beta = 37° 29' 35''$.

---

§ 15. Herhaling 1.

358. Bewijs:
$$\sec\alpha - \sqrt{\sec^2\alpha - 1} \times \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \cos\alpha.$$

359. Schrijf in goniometrische verhoudingen van α alle goniometrische verhoudingen van $450° + \alpha$.

360. Breng in goniometrischen vorm:
$$2\, a_{12}\, p_{12} = R^2.$$

361. Schrijf in eenvoudiger vorm:
$$(\sqrt{1 - \sin^2\alpha})^3 \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha \sin^2\alpha (\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha) \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

362. Van een hoek is de secans gelijk aan de verhouding van den sinus en den cosinus. Bepaal den sinus van dien hoek.

363. Druk uit in goniometrische verhoudingen van positieve scherpe hoeken:

a. $\sin 205°$, *c.* $\operatorname{tg}(-530°)$, *e.* $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}(-305° 17' 53'')}$.
b. $\cos(-136°)$, *d.* $-\cot 1000°$,

364. Als van een hoek in het eerste negatieve kwadrant het kwadraat van den sinus $\dfrac{1}{1 + p^2}$ is, bepaal dan de 6 goniometrische verhoudingen van dien hoek.

365. In $\triangle$ ABC, waarin AB = 21,4; BC = 6,8 en CA = 16,8, beschrijft men uit B als middelpunt met $\frac{1}{2}$ BA tot straal een cirkel, die AC in E snijdt. Bereken $\angle$ BEC.

366. Schrijf als één goniometrische verhouding zonder het — teeken ervoor:

a. $-\cos 13°15'$, *c.* $-\operatorname{tg} 301° 27'$, *e.* $-\cos 15° 13'$,
b. $-\sin 13° 15'$, *d.* $-\cot 15° 13'$, *f.* $-\sin 170° 13'$.

367. Van twee hoeken is de som der sinussen $a^2 + 1$ en de sinus van de halve som a. Bereken den cosinus van het heele verschil.

368. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cos(60° + a)\cos(30° + a) - \cos(60° - a)\cos(30° - a)$,

b. $\cot^2 \frac{1}{2}\alpha(1 - \cos\alpha) - 1$,

c. $\dfrac{\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}$.

369. Als gegeven is $\operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - a^2}}$ en $\operatorname{cosec}^2\beta = \dfrac{2}{1 - \sqrt{1 - a^2}}$, en α in het 3e, β in het 1e kwadrant ligt, bepaal dan $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. In welk kwadrant ligt $\alpha - \beta$?

---

§ 16. **Trigonometrie.** (Tweede reeks).

a. Rechthoekige driehoek.

370. Als in een rechthoekigen driehoek de hoogtelijn op de schuine zijde 9,8073 en een der stukken, waarin zij de schuine zijde verdeelt, 12,035 is, bereken dan de rechthoekszijden van dien driehoek.

371. Als in een rechthoekigen driehoek de projecties van de rechthoekszijden op de schuine zijde zich verhouden als 5 : 8, bereken dan de scherpe hoeken van dien driehoek.

372. Bepaal de zijden van een rechthoekigen driehoek met een oppervlakte = I en een scherpen hoek = α.

373. Als van een regelmatigen 10-hoek de zijde 3,456 cM gegeven is, bepaal dan de oppervlakte.

374. Een regelmatige 9-hoek moet een oppervlakte van 1 M^2 hebben. Bepaal zijn straal.

375. Bewijs, dat de oppervlakte van een regelmatigen 8-hoek met een zijde a_8 gelijk is aan

$$2\, a_8^2 \cot 22°30'.$$

376. Bewijs, dat de oppervlakte van een regelmatigen n-hoek met een zijde a_n en een straal R gelijk is aan

a. $\frac{n}{4}\, a_n^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$, *b.* $\frac{n}{2}\, R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$.

377. Op de basis AC $= b$ van een gelijkbeenigen driehoek met een basishoek $= \alpha$ neemt men een willekeurig stuk AD $= p$. Bewijs goniometrisch, dat de som der afstanden van D tot de beenen gelijk is aan de hoogtelijn op een der beenen.

378. Op de rechthoekszijden CA en CB van een rechthoekigen driehoek met de schuine zijde AB $= c$ en $\angle$ A $= \alpha$ beschrijft men buitenwaarts vierkanten ACDE en BCFG. Bewijs goniometrisch:

a. dat de afstanden van D en F tot de (verlengde) hoogtelijn uit C gelijk zijn,

b. dat het verschil der afstanden van D en E tot de (verlengde) schuine zijde gelijk is aan het verschil der afstanden van F en G tot dezelfde zijde.

379. In den rechthoekigen $\triangle$ ABC (C rechte hoekpunt) is de bissectrix van $\angle$ A $= \alpha$ getrokken, B op deze bissectrix in D geprojecteerd, en D op AB in E geprojecteerd. Bewijs goniometrisch, dat AE de halve som en EB het halve verschil van de zijden AB en AC voorstelt.

380. Als in een rechthoekigen driehoek c de schuine zijde is, bewijs dan:

a. $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{c-a}{b} = \frac{b}{c+a}$,

b. $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$.

---

b. *Scheefhoekige driehoek.*

381. Als in $\triangle$ ABC gegeven is, dat $\angle$ B $= 2 \times \angle$ A, bewijs dan:

a. $b = 2\, a \cos A$,

b. $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - 1$,

c. $a^3 = a\,(b^2 + c^2) - b^2 c$.

382. Bewijs, dat men in elken driehoek heeft

a. $a \cos B + b \cos A = c$,

b. $a \cos B - b \cos A = c \dfrac{\sin (A - B)}{\sin C}$,

c. $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{\cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}$,

d. $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{\sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}$,

e. $\dfrac{a-b+c}{a+b-c} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}$.

383. De eene diagonaal van een parallélogram verdeelt een der hoeken in de hoeken A_1 en A_2, en de andere verdeelt een der andere hoeken in B_1 en B_2. Bewijs, dat als A_1 en B_1 aan eenzelfde zijde grenzen,

$$\sin A_1 : \sin A_2 = \sin B_1 : \sin B_2.$$

384. Bewijs, dat in elken driehoek

a. $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \dfrac{b \cos A}{a \cos B} = \dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}$,

b. $b^2 - c^2 = a (b \cos C - c \cos B)$.

385. Als AD een willekeurige rechte in $\triangle$ ABC is, bewijs dan: $DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2 + 2\, AD \times BC \times \cos BDA$.

386. Als de bissectrix e van een driehoek de overstaande zijde a verdeelt in $BD = a_1$ en $DC = a_2$, te bewijzen:

a. $a_1 : a_2 = \sin \gamma : \sin \beta$,

b. $a_1^2 - a_2^2 = (c - b) \left(b + c - 2\, e \cos \frac{\alpha}{2}\right)$.

387. Als de uiteinden van een cirkelboog van $2p°$ verbonden worden door de rechten a en b met een punt van dien boog,

dat op een boogafstand $= q^\circ$ van het midden van dien boog ligt, dan is

$$(a + b) \operatorname{tg} \frac{q^\circ}{2} = (a - b) \operatorname{tg} \frac{p^\circ}{2}.$$

Bewijs dit.

388. Als twee zijden van een driehoek zich verhouden als $a : b$ $(a > b)$, en de bissectrix van den ingesloten hoek 2γ maakt met de hoogtelijn uit C een hoek φ, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \gamma = \frac{a - b}{a + b}.$$

Bewijs dit.

389. Bewijs, dat men in elken driehoek heeft

a. $\frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{1}{2} A + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{1}{2} B + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{1}{2} C = 0,$

b. $\frac{b-c}{a} \cot^2 \frac{1}{2} A + \frac{c-a}{b} \cot^2 \frac{1}{2} B + \frac{a-b}{c} \cot^2 \frac{1}{2} C =$
$= \frac{s^3 (a-b)(b-c)(a-c)}{abc(s-a)(s-b)(s-c)},$

c. $\frac{b-c}{a} \sin^2 \frac{1}{2} A + \frac{c-a}{b} \sin^2 \frac{1}{2} B + \frac{a-b}{c} \sin^2 \frac{1}{2} C =$
$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{a\,b\,c}.$

390. Als de hoogtelijn h_a van een driehoek door een andere hoogtelijn verdeeld wordt in de stukken p en p_1 (p grenzende aan het hoekpunt), eveneens h_b in q en q_1 en h_c in r en r_1, bewijs dan dat men heeft:

a. $h_a : h_b : h_c = \sin B \sin C : \sin C \sin A : \sin A \sin B,$

b. $p : q : r = \cos A : \cos B : \cos C,$

c. $p_1 : q_1 : r_1 = \cos B \cos C : \cos C \cos A : \cos A \cos B.$

391. Bewijs, dat als d de bissectrix is van $\angle$ A van een driehoek,

$$\frac{d}{b} + \frac{d}{c} = 2 \cos \frac{A}{2}.$$

392. Als men op de zijde a van $\triangle$ ABC als diagonaal een vierkant beschrijft en de beide vrije hoekpunten daarvan verbindt met het hoekpunt A door de verbindingslijnen p en q, bewijs dan dat men heeft:

a. $p^2 = \frac{1}{2} a^2 + b^2 - a\,b\,(\cos C - \sin C)$,
b. $q^2 = \frac{1}{2} a^2 + b^2 - a\,b\,(\cos C + \sin C)$,
c. $p^2 - q^2 = 2ab \sin C = 2bc \sin A = 2ac \sin B$,
d. $p^2 + q^2 = b^2 + c^2$.

393. Als men op de zijde a van $\triangle$ ABC in het hoekpunt C loodlijnen $= a$ naar weerszijden opricht en de uiteinden daarvan verbindt met het hoekpunt A door de verbindingslijnen p en q, bewijs dan dat men heeft:
a. $(p^2 - a^2 - b^2)^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$,
b. $(a^2 - b^2 - q^2)^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

394. Op een willekeurige zijde van een driehoek construeert men naar weerszijden gelijkzijdige driehoeken. Als p en q de verbindingslijnen van de toppen dezer driehoeken met het overstaande hoekpunt van den oorspronkelijken driehoek zijn, bewijs dan:
a. $p^2 - q^2 = 2ab\sqrt{3} \sin C = 2bc\sqrt{3} \sin A = 2ac\sqrt{3} \sin B$,
b. $p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Wat volgt hieruit voor de 3 mogelijke lijnen p en de 3 mogelijke lijnen q?

395. Bewijs, dat in elken driehoek is:
a. $\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{s\,(ab + bc + ac - s^2)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

b. $\cot\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} =$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - s^2}{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

396. Bewijs, dat men in elken driehoek heeft:
a. $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}}$,
b. $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \frac{c-b}{a}\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}}$,
c. $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \frac{b+c}{c-b}\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$.

397. Als d_1 en d_2 de diagonalen, a en b de zijden, A een der hoeken van een parallellogram zijn, bewijs dan:

$$\cos A = \pm \frac{d_1^2 - d_2^2}{2ab}.$$

---

398. Bereken de zijden van een gelijkbeenig trapezium, als de stukken, waarin een diagonaal door een andere verdeeld wordt, 209 en 92 zijn, en de diagonaal in het uiteinde van het eerste stuk een hoek van 15° 37′ 24″ met het been maakt.

399. Als van een driehoek de grootste zijde a is, en de aanliggende hoeken B en C zijn, bereken dan de stukken, waarin de zijde a verdeeld wordt:

a. door de hoogtelijn uit het overstaande hoekpunt,
b. door de bissectrix uit het overstaande hoekpunt,
c. door de beide middelloodlijnen op de zijden b en c (drie stukken).

400. In een driehoek maakt een zwaartelijn $= \sqrt{7}$ met een der zijden $= \sqrt{21}$ in het hoekpunt, waarvan die zwaartelijn uitgaat, een hoek van 30°. Bereken:

a. de andere zijde in dat hoekpunt, *b.* de hoeken.

401. In een driehoek verdeelt de bissectrix = 51,793 van een hoek van 57° 13′ 48″ de overstaande zijde in stukken, die zich verhouden als 9 : 11. Bereken de zijden van dien driehoek.

402. Bereken de hoeken van een driehoek, waarvan twee hoogtelijnen zich verhouden als 2 : 3, terwijl het verschil van de hoeken, waarvan zij uitgaan, bedraagt 25° 13′ 12″.

403. Van een vierhoek zijn drie opeenvolgende hoeken 107°, 130° 17′ en 50° 13′ 14″; de twee zijden, die den eersten hoek insluiten, zijn 11,89 en 20,907. Bereken de verhouding der onbekende zijden.

404. Bereken de hoeken van een parallelogram, als zijn diagonalen en een zijner zijden zich verhouden als 12 : 8 : 9.

405. De zwaartelijnen van een driehoek zijn 20, 18 en 15. Bereken de hoeken, die zij met elkaar maken.

---

§ 17. Herhaling 2.

406. De som der cosinussen van twee hoeken is $1 - a^2$ en de cosinus van het halve verschil $\frac{1 + a^2}{2}$. Bereken den sinus van de heele som.

407. Te bewijzen:

a. $\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = \sin\alpha,$

b. $\sin(t + y) + \sin(t - y) - \sin(t + x) - \sin(t - x) =$
$= 4\sin t \sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}.$

408. Schrijf in eenvoudiger vorm:

a. $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta),$

b. $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\alpha}(1 + \cos\alpha).$

c. $\sin 3\alpha - 2\cos 2\alpha \sin\alpha,$

d. $\cos 3\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha.$

409. Bereken $\mathrm{tg}\,(2\alpha - \beta)$, als $\mathrm{tg}\,\alpha = p^2 + \sqrt{p^4 + 1}$ en $\mathrm{cosec}^2\,\beta = 1 + q^4$, terwijl β in het 3e kwadrant ligt.

410. Druk uit in goniometrische verhoudingen van positieve scherpe hoeken:

a. $\cot 109^\circ \cos 19^\circ$, *b.* $\frac{\mathrm{cosec}\,197^\circ\,13'}{\mathrm{cosec}\,252^\circ\,47'}.$

411. In een rechthoekigen driehoek heeft het middelpunt van den ingeschreven cirkel afstanden = 15,7 en 84,3 van de scherpe hoekpunten. Bereken de hoeken van dezen driehoek.

412. Op de zijde c van $\triangle$ ABC als grootste diagonaal construeert men een ruit met een hoek van 60°. Als p en q de verbindingslijnen van de vrije hoekpunten dezer ruit met C zijn, bewijs dan:

$$p^2 - q^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,ab\sin C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,bc\sin A = \frac{2}{\sqrt{3}}\,ac\sin B.$$

413. Als gegeven is

$$\frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\cos C} = \sin (B - A),$$

bewijs dan, dat òf $A + B + C = 90°$, òf $A = B$ is.

414. Als van de hoeken van een driehoek gegeven is

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} \sin 1\tfrac{1}{2} B = \sin \tfrac{1}{2} B,$$

bewijs dan dat de driehoek gelijkbeenig is.

415. In vierhoek ABCD met de diagonaal BD is $AB = 152{,}633$; $BC = 34$; $CD = 84$; $\angle BAD = 44° 30'$ en $\angle BDA = 89°$. Bereken $\angle C$.

416. Als gegeven is $\sec \alpha = 3$ en $\operatorname{cosec}^2 \beta = 1\tfrac{1}{2}$, terwijl α in het 4e en β in het 3e kwadrant ligt, bepaal dan zonder tafel $\cot (270° + \tfrac{1}{4} \alpha - \beta)$.

417. Als van de hoeken van een driehoek gegeven is

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{tg} C - \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} \frac{A}{2}},$$

bewijs dan, dat de driehoek rechthoekig is.

D. TOEGEPASTE TRIGONOMETRIE.

§ 18. Toegepaste trigonometrie.

Theorie.

a. In één vlak.

Voorbeeld. Als de grootte en richting (bijv. West-Oost) van den afstand der punten A en B bekend is (Fig 19), vraagt men de grootte en de richting van den afstand der ontoegankelijke punten X en Y, met A en B in eenzelfde horizontale vlak gelegen, te bepalen.

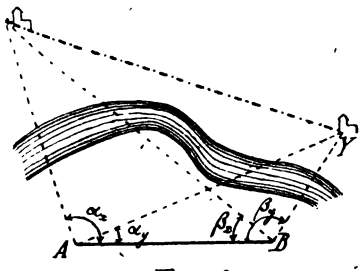


Fig. 19.

Oplossing. Het eenige, wat men in A en B met instrumenten doen kan, is na meting van grootte en richting van den afstand AB: in het punt A een kijker te richten op X (en later op Y (welke punten van A uit zichtbaar, maar ontoegankelijk zijn, bijv. door

een tusschenstroomende rivier) en te meten, over welken hoek de kijker uit deze richtingen gedraaid moet worden om op B gericht te worden; daardoor meet men dus de hoeken α_x en α_y. Hetzelfde kan men in B doen en kent dan de hoeken β_x en β_y. Nu zijn van den vierhoek ABYX vijf gegevens bekend: nl. AB = d en de hoeken α_x, α_y, β_x en β_y; de vierhoek is dus volkomen bepaald en men kan daarvan berekenen, wat men verder noodig heeft: In △ ABX zijn één zijde d met de aanliggende hoeken α_x en β_x bekend, zoodat door den sinusregel AX bepaald kan worden. Heeft men op dezelfde wijze uit △ ABY AY bepaald, dan zijn in △ XAY twee zijden AX en AY en de ingesloten hoek $\alpha_x - \alpha_y$ bekend; zoodat in dezen driehoek door tangens- en sinusregel XY en ∠ AXY bepaald kunnen worden. Daardoor is het vraagstuk opgelost, want de grootte van XY leidt men af uit de richting van AB in verband met de hoeken BAX en AXY

Problema van Snellius.

Opgave. Als de ligging van drie punten A, B, C (Fig. 20) in een horizontaal vlak volkomen bekend is, vraagt men daaruit de ligging van een vierde punt X van hetzelfde horizontale vlak door waarnemingen enkel uit dat punt af te leiden.

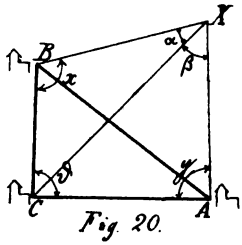


Fig. 20.

Bijv. men kent op een kaart volkomen nauwkeurig de ligging der kerktorens A, B en C; men is geplaatst in een onbekend punt X, vanwaar men die drie kerktorens kan zien; nu wil men bepalen, waar zich dat punt X op de kaart bevindt.

Oplossing. Het eenige, wat men in het punt X met instrumenten kan doen, is te meten de hoeken α = BXC en β = CXA (met een kijker, evenals in de vorige opgave). Kent men deze hoeken, dan zijn dus gegeven de *hoeken, waaronder men uit X de afstanden BC en CA ziet.* In de vlakke meetkunde lost men nu, zooals bekend, het vraagstuk op door beschrijving van een paar cirkelbogen, die door B en C en door C en A gaan en waarvan de eerste ∠ α en de tweede ∠ β „bevat"; het snijpunt levert dan het punt X op. Hier verlangt men de oplossing (practisch veel nauwkeuriger) door berekening, waarbij eenige kunstgrepen gebruikt worden.

Daartoe *neemt men in de eerste plaats als onbekenden aan de hoeken XBC = x en XAC = y.* Deze onbekenden zijn nl. voldoende om de ligging van X te bepalen: kent men ze, dan zijn in △ BCX een zijde met twee hoeken bekend (BC = a en de hoeken x en α), en men kan dus door den sinusregel BX berekenen; eveneens AX uit △ CAX; door de lengten van BX en AX is de plaats van X nauwkeurig bekend. Nu zijn voor de berekening van de 2 onbekenden x en y twee vergelijkingen noodig; een eerste kent men door de som der hoeken van vierhoek XBCA:

$$x + y = 360° - \alpha - \beta - \vartheta \qquad (1)$$

een tweede vindt men door *de verbindingslijn CX in twee verschillende driehoeken uit te rekenen en de gevonden waarden aan elkaar gelijk te stellen*; nl. in △ BXC

$$XC = a \frac{\sin x}{\sin \alpha}$$

en in $\triangle$ AXC $\qquad XC = b\,\frac{\sin y}{\sin \alpha}$;

dus door gelijkstelling

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \qquad (2)$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2) zijn dan x en y te bepalen. Daartoe moet men echter (2) behandelen *op overeenkomstige wijze als bij den tangensregel*:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta}. \qquad (3)$$

Aangezien $x + y$ door (1) bekend is, zou (evenals bij den tangensregel) $\frac{x-y}{2}$ enz. uit deze vergelijking te bepalen zijn en daarvoor het probleem op te lossen. Echter is de gevonden waarde in het laatste lid van (3) niet erg geschikt voor logarithmische berekening. Was bijv. $a = 9$ KM, $b = 12$ KM, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, dan zijn men volgens (3) vinden

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2},$$

en de breuk in het tweede lid is voor logarithmische berekening ongeschikt. Daarom passen wij een vierden kunstgreep toe en *voeren een „hulphoek" φ in* door de waarde uit (2)

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi \qquad (4)$$

te stellen. De hulphoek φ heeft dan een door de vergelijking (4) volkomen bepaalde waarde, bijv. bij de boven aangenomen getallengegevens $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, dus $\varphi = 43° 34' 38''$, en wij kunnen er als met een bekend gegeven mee verder werken. Nu wordt nl.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg} \varphi \text{ of } \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1}$$

en door de eigenschappen der evenredigheden

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+x}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}.$$

Maar volgens de formule voor $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ is dit laatste gelijk aan $\operatorname{tg}(\varphi - 45°)$; dus

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45°) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Deze vergelijking, die nu voor logarithmische berekening volkomen geschikt is, levert ons $\frac{x-y}{2}$, daarna (door de bekende waarde $x + y$) x en y en de gezochte waarden van AX en BX.

(Bij de aangenomen getallengegevens van hierboven wordt $\varphi - 45°$ negatief. Echter zal in de gekozen figuur $x + y$ in het derde kwadrant liggen (bijv.

als $\delta = 90°$, $x + y = 195°$) en dus $\frac{x+y}{2}$ stomp zijn, dus tg $\frac{x+y}{2}$ ook negatief. Voor tg $\frac{x-y}{2}$ vindt men dus toch weer een positieve waarde.)

---

b. In meer vlakken.

Voorbeeld. Lagen in fig. 19 X en Y niet met de horizontale lijn AB op dezelfde hoogte, maar lag (Fig. 21) bijv. X een zeker bedrag hooger, terwijl Y even hoog als AB lag, dan zou men voor het in kaart brengen der punten X en Y verlangen de richting en grootte van de lijn X_p Y, als X_p de projectie is van X op het vlak ABY, alsmede de hoogte X_p X. Immers op een kaart worden aangegeven de projectie der verschillende geographische punten op een van te voren aangenomen horizontaal vlak, en de hoogte van deze punten boven of beneden dat vlak.

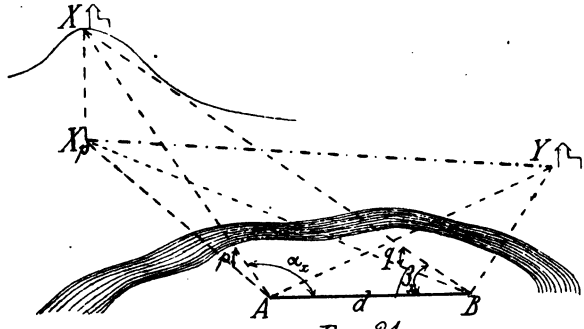


Fig. 21.

In A kan men nu, voor X (de meting voor Y laten wij hier nu maar weg), niet alleen meten $\angle\ \alpha_x$ (welke hoek nu echter niet meer in een horizontaal vlak ligt), maar ook de afwijking $= \angle\ p$ van de richtingslijn AX van de horizontaal, eveneens in B behalve β_x ook nog de afwijking q. In $\triangle$ AXB zijn nu weer één zijde met de beide aanliggende hoeken bekend (d en α_x en β_x), zoodat AX en BX te berekenen zijn. Daarna kan, zoowel in den rechthoekigen $\triangle$ AXX_p als in den rechthoekigen $\triangle$ BXX_p door AX en $\angle\ p$ (of door BX en $\angle\ q$) de hoogte XX_p bepaald worden. Uit dezelfde rechthoekige driehoeken volgen verder AX_p en BX_p; in $\triangle$ AX_pB zijn de drie zijden bekend, zoodat $\angle\ X_pAB$ en $\angle\ X_pBA$ berekend kunnen worden uit de formules voor tg $\frac{\alpha}{2}$ enz., en wij zijn weer even ver als in het vraagstuk van fig. 19.

Vraagstukken.

a. In één vlak.

418. Om de ligging van twee ontoegankelijke punten P en Q te bepalen, heeft men op de gemeten basis AB = 827,53 M het punt A zoo gekozen, dat $\angle$ PAB = 90°. Als verder gemeten wordt $\angle$ QAB = 44° 29′, $\angle$ PBA = 39° 12′ en $\angle$ QBA =

110° 13′, hoe lang is dan PQ en hoeveel wijkt haar richting van die van AB af?

419. Op een gemeenschappelijke lijn AB = 87,93 M zijn geconstrueerd naar dezelfde zijde van AB twee gelijkbeenige driehoeken, een met AB als basis en een tophoek van 45°, en een met AB als been en een tophoek van 135°. Hoever liggen de niet gemeenschappelijke hoekpunten van deze driehoeken van elkaar af?

420. Om de richting van de ontoegankelijke lijn CD vast te stellen, heeft men van de uiteinden van een basis AB = d uit gemeten ∠ CBA = 100° 14′, ∠ DBA = 22° 13′, ∠ CAB = 50° 15′ en ∠ DAB = 123° 12′. Hoeveel wijkt de richting van CD van die van BA af?

421. Men bepaalt de breedte van een rivier in een recht gedeelte van haar loop op de volgende wijze. Schuin tegenover elkaar plaatst men aan beide oevers aan den waterkant de bakens A en B; daarna meer landwaarts in aan de zijde van A een baken C zoo, dat CB loodrecht staat op beide oevers. Als men uit A de bakens B en C onder een hoek A, en uit C de bakens A en B onder een hoek C ziet, en AC = a gemeten is, bepaal dan de breedte der rivier.

422. Twee rechte wegen snijden elkaar rechthoekig in O. Als een legermacht op den eenen weg aan weerszijden van O de punten A en D bezet houdt en op den anderen weg ter weerszijden van O de punten B en C, en men daar opgemeten heeft AB = 1750 M, AC = 1059 M, ∠ BAC = 105° 17′, ∠ ABD = 80° 23′, terwijl het punt O in het bezit van den vijand is, hoe groot is dan de afstand OD?

423. Men bevindt zich in de basis = 8,347 HM van een horizontaal gelegen driehoek met de opstaande zijden 9,238 H.M en 3,956 H.M in een punt, waaruit men de langste opstaande zijde onder een hoek vnn 110° 37′ ziet. Bepaal de afstanden, waarop men zich in dat punt van de uiteinden der basis bevindt.

424. Twee rechte boschlanen snijden elkaar in D. Om den afstand van dit punt dwars door het bosch tot een buiten het bosch gelegen punt C te bepalen, neemt men op het verlengde

van ieder der lanen buiten het bosch een punt A en een punt B, wier afstand tot C bekend is (AC = 1853 M, BC = 2537 M) en meet AB = 1354 M, ∠ DAB = 27° 13′ 20″, ∠ ABD = 21° 5′ 32″. Bereken uit deze gegevens CD.

---

425. Van een berg, die zich 345 M boven een dal verheft, ziet men een kerktoren in het dal onder een hoek van 3° 15′ 24″, terwijl de gezichtslijn naar den top van den toren een hoek van 20° 13′ met de horizontaal maakt. Hoe hoog is die toren?

426. *a.* Uit twee verdiepingen van een hotel, die *a* M in hoogte verschillen, ziet men een rotswand boven op een berg tegenover zich. Uit de onderste verdieping ziet men voet en top van den wand schuin boven zich onder hellingen van resp. α_1 en α_2 met de horizontaal; uit de bovenste ziet men den voet onder een hoek β_1 met de horizontaal. Hoe hoog is de rotswand?

b. Dezelfde opgave met de getallen $a = 6$ M, $\alpha_1 = 18° 13'$, $\alpha_2 = 25° 12'$, $\beta_1 = 16° 17'$.

427. Iemand, wiens oog zich 1,6 M boven den grond bevindt, ziet van de plaats waar hij staat de spits van een toren schuin omhoog in een richting, die een hoek van 31° 13′ 20″ met de horizontaal maakt. Nadert hij den toren 40.4 M in horizontale richting, dan wordt deze hoek 44° 12′ 10″. Hoe hoog is de toren?

428. *a.* Maar als die persoon (No. 578), met het oog op een afstand = *h* boven den grond, zich bevonden had op een pad, dat onder een constante helling β naar den voet van den toren afliep, en hij had de spits eerst onder een hoek $= \alpha_1$ met de horizontaal naar boven, en, *d* M langs het pad verder, onder een hoek $= \alpha_2$ naar boven gezien, hoe hoog was dan die toren geweest?

b. Dezelfde opgave met de getallen $h = 1{,}6$ M, $d = 100$, $\alpha_1 = 10° 44'$, $\alpha_2 = 45° 17'$, $\beta = 20° 13'$.

Snellius.

429. Uit een punt P worden been en basis van een gelijkbeenigen driehoek (been 12 M, tophoek 38°) gezien onder hoeken van resp. 34° en 29′. Op welken afstand ligt dat punt van den top?

430. Iemand bevindt zich in het veld en ziet twee opeenvolgende HM paaltjes (No. 1 en 2) van een rechten straatweg onder een hoek van 29° 17′; No. 3 ziet hij niet, maar No. 4 wel; No. 2 en 4 onder een hoek van 79° 43′. Op welken afstand bevindt hij zich van den weg?

431. In een rechthoekigen driehoek met 3 en 4 tot rechthoekszijden heeft men een punt bepaald, van waar men de drie zijden ziet onder hoeken, die zich verhouden als die zijden. Bepaal den afstand van dat punt tot het rechte hoekpunt.

432. Uit een punt P ziet men de zijden AB en BC van een gelijkzijdigen driehoek onder hoeken van 15° en 30°; uit een punt Q juist omgekeerd onder hoeken van 30° en 15°. Bepaal den afstand der punten P en Q, als de zijde van den gelijkzijdigen driehoek a is.

---

b. In meer vlakken.

433. Iemand, wiens oog zich 1.70 M boven den grond bevindt, ziet de spitsen van de twee torens eener kerk, beide 90 M hoog en op een afstand van 45 M van elkander geplaatst, onder hellingen van 35° 17′ 30″ en 34° 53′. Welke hoeken maken de lijnen, van zijn standplaats naar den voet van ieder der torens getrokken, met de verbindingslijn van den voet van beide torens?

434. Op den voorgevel van een rechthoekig huis van 12 M breedte loopen verschillende horizontale strepen. Als een waarnemer, die zoo geplaatst is, dat hij den zijgevel van het huis als één rechte lijn ziet, de horizontale streep ter hoogte van zijn oog onder een hoek van 10° 19′ ziet, onder welken hoek ziet hij dan de streep, die 5,7 M hooger is?

435. Het oog van een waarnemer bevindt zich 1,60 M boven den grond en op afstanden van 30 M en 26 M van de zijkanten van den voorgevel van een 12 M breed huis. Onder welken hoek ziet hij de kroonlijst, die 18 M boven den grond is?

436. Twee militaire waarnemers, wier afstand 1000 M bedraagt, zien, geplaatst in een vlakte, eenzelfde vliegtuig, de eene in N.O. richting onder een helling van 68°, de andere in N. richting

onder een helling van 58°. Bepaal de hoogte van het vliegtuig en den afstanden van zijn projectie op de vlakte tot de standplaatsen der beide waarnemers.

437. Uit de uiteinden van een gemeten horizontale basis AB = 300 M. ziet men een bergtop T onder gelijke hellingen van 15° 13′ 12″, terwijl ∠ TAB = 78° 20′ 36″ gemeten wordt. Als de voet V van dezen berg, die even hoog als AB ligt, uit A en B zoo waargenomen wordt, dat ∠ VAB = 32° 23′ 25″ en ∠ VBA = 118° 23′ 15″ is. bepaal dan:

a. de hoogte van den berg boven AD,

b. den afstand van V tot de projectie van den bergtop T op het vlak ABV,

c. de gemiddelde berghelling van T naar V,

d. den afstand TV.

---

438. Bepaal den hoek, dien een lichaamsdiagonaal van een kubus maakt:

a. met een ribbe,

b. met een andere lichaamsdiagonaal,

c. met een zijvlak.

439. Bepaal de standhoeken van een viervlak, waarvan 3 ribben in één hoekpunt gelijk zijn en onderling rechte hoeken maken.

440. Bepaal de standhoeken van een viervlak, waarvan 3 ribben = 9, 12 en 16 uit één hoekpunt onderling rechte hoeken maken.

441. In het hoekpunt A van een rechthoek ABCD met de zijden AB = a en AD = b richt men een loodlijn AT = c op en verbindt T met A, B, C en D. Bepaal:

a. den standhoek op CD,

b. den standhoek op CB,

c. den standhoek op CT.

442. Dezelfde vragen *a. b* en *c* van No. 596 voor de getallen $a = 16$, $b = 9$, $c = 12$.

---

c. Gemengd.

443. Een luchtschip beweegt zich met beide schuitjes op de hoogte van den top van een 100 M hoogen toren. Als men uit het voorste schuitje den toren onder een hoek van 13° en uit het achterste schuitje onder een hoek van 12° ziet, en de afstand der waarnemers 50 M bedraagt, bereken dan, welken hoek de richting van het luchtschip maakt met de gezichtslijn uit het voorste schuitje naar den torentop.

444. Men ziet uit een punt van een vlakte, waarop zich twee torens, hoog 48 M en 72 M, op een onderlingen afstand van 720 M, verheffen, die beide torens onder gelijke hoeken, terwijl men den horizontalen afstand der torens onder een hoek van 95°15′ ziet. Bereken den hoek, waaronder men de beide torens ziet.

445. In vierhoek ABCD is zijde BC = diagonaal CA = 15, zijde AB = $5\sqrt{3}$, terwijl $\angle$ CDA = 60° door BD wordt middendoor gedeeld. Bereken BD.

446. Bepaal in een regelmatige vierzijdige pyramide, waarvan alle ribben gelijk zijn,

a. den hoek van een opstaande ribbe met het grondvlak,
b. de standhoeken,
c. den hoek, dien de diagonaal van het grondvlak met de zijvlakken maakt.

447. Een lange dunne stok staat recht ten Z. van een korten dikken. Heeft de zon 's middags om 12 uur een hoogte van α, dan vallen de eindpunten der schaduwen samen; is de middaghoogte echter β, dan valt de schaduw van den langen stok d_1 en die van den korten d_2 verder dan eerst. Bepaal de hoogte der stokken en hun afstand.

448. Uit het voorste schuitje van een op 500 M hoogte horizontaal in N.W. richting varend luchtschip ziet men aan de rechterzijde een 80 M hoogen torentop onder een hoek van 69°43′ met de bewegingsrichting, en uit het achterste schuitje onder een hoek van 68°59′ met de bewegingsrichting. Als de afstand der waarnemers in de schuitjes 100 M bedraagt,

a. op welken horizontalen afstand bevindt zich dan het voorste schuitje van den torentop,
b. welke afwijking van de richting N. heeft deze afstand?

§ 19. Oppervlak, om- en ingeschreven cirkel.

Theorie.

a. Oppervlak.

Van $\triangle$ ABC (Fig. 22) waarin de hoogtelijn AD $= c \sin \alpha$ getrokken is, is de oppervlakte $\frac{1}{2}$ AC $\times$ BD $= \frac{1}{2} b \times c \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$, dus

$$\boxed{I\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \sin \alpha} \quad \text{(Form. 55)}$$

Het tweede lid had natuurlijk ook $\frac{1}{2}\, ac \sin \beta$ of $\frac{1}{2}\, ab \sin \gamma$ kunnen zijn.

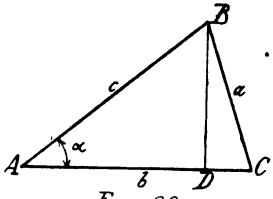


Fig. 22.

In woorden:

De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan het halve produkt van twee zijden en den sinus van den ingesloten hoek.

De formule gaat onveranderd door als de ingesloten hoek stomp is.

Van een parallelogram (het dubbele van een driehoek) is de oppervlakte natuurlijk gelijk aan het produkt van twee opeenvolgende zijden en den sinus van den ingesloten hoek.

b. Om- en ingeschreven cirkel.

Is (Fig. 23) (M) de ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, dan is *bg* BC $= 2\alpha$, dus in den gelijkbeenigen $\triangle$ BMC $\angle$ BMC $= 2\alpha$, $\angle$ BMD $= \alpha$, en de straal

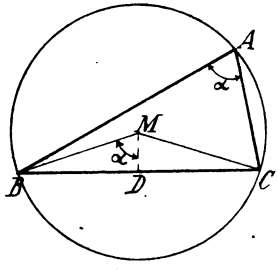


Fig. 23

$$BM = \frac{BD}{\sin BMD} = \frac{\frac{1}{2}\, a}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha}, \text{ dus}$$

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \alpha}} \quad \text{(Form. 56)}$$

Eveneens had men kunnen vinden $\frac{b}{2 \sin \beta}$ en $\frac{c}{2 \sin \gamma}$, welke waarden volgens den sinusregel aan de eerste gelijk zijn.

Met het oog op het maken van vraagstukken merken wij nog op, dat door middel van de drie stralen, getrokken naar de hoekpunten, de driehoek beschouwd kan worden als de som van 3 gelijkbeenige driehoeken BMC, CMA en AMB, die alle hun top in het middelpunt hebben.

Deze opmerking is ook van kracht en van waarde voor den koordenvierhoek.

Opgave. Uit een zijde en de beide aanliggende hoeken van een driehoek den straal van den ingeschreven cirkel te bepalen.

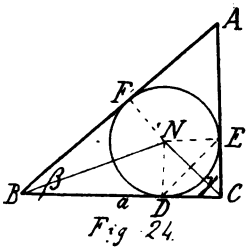


Fig 24.

Oplossing. Zij (Fig. 24) BC = a de gegeven zijde met de aanliggende hoeken β en γ. Uit de planimetrie weten wij, dat BN en CN bissectrices zijn van de hoeken B en C. In △ BNC is dus volgens den sinusregel, omdat sin BNC = sin (NBC + NCB),

$$BN = BC \frac{\sin NCB}{\sin BNC} = a \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}.$$

Dus is in den rechthoekigen driehoek BND

$$r = BN \sin \frac{}{2} = a \frac{\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}.$$

Met het oog op het maken van vraagstukken vestigen wij nog de aandacht op den rechthoekigen △ CND, waarin DC = $s - c$, enz., den symmetrischen vierhoek CDNE (waarvan drie dergelijke den geheelen driehoek vormen), en den gelijkbeenigen △ CDE, waarin DE ⊥ CN is.

Soortgelijke opmerkingen gelden voor de aangeschreven cirkels, en voor den raaklijnvierhoek.

Vraagstukken.

a. Oppervlak.

449. Als de diagonalen van een vierhoek d_1 en d_2 zijn en een hoek = D met elkaar vormen, bewijs dan dat men heeft voor zijn oppervlakte

$$I = \tfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin D.$$

450. Bewijs, dat de oppervlakte I van een koordenvierhoek met de zijden a, b, c en d en den hoek α tusschen de zijden a en b, β tusschen b en c, gelijk is aan

$$I = \tfrac{1}{2}(ab + cd) \sin\alpha = \tfrac{1}{2}(bc + ad) \sin\beta.$$

451. Bewijs, dat de oppervlakte van een trapezium met de evenwijdige zijden e_1 en e_2 ($e_1 < e_2$) gelijk is aan

a. $\dfrac{pq\,(e_1^2 + e_2^2)}{2\,e_1^2}$ sin D, als p en q de stukken der diagonalen zijn, die aan de zijde e_1 grenzen, en D een van de hoeken der diagonalen is,

b. $\dfrac{cd\,(e_2^2 - e_1^2)}{2\,e_1^2}$ sin B, als c en d de verlengden der beenen zijn tot hun snijpunt, en B de hoek, dien zij daar met elkaar maken.

452. Bereken de oppervlakte van een driehoek, als gegeven zijn de elementen:

a. $a = 12{,}328$; $b = 14{,}137$; $\gamma = 108° 13'$;
b. $c = \sqrt{15}$; $\alpha_1 = 100° 13'$; $\beta = 50° 50' 50''$;
c. $a = 3 - \sqrt{3}$; $\beta = 30°$; $\alpha = 15°$;
d. $b = 38{,}034$; $c = 20{,}459$; $\gamma = 25° 43' 27''$.

453. Druk de oppervlakte van een driehoek uit:

a. in een zijde en de beide aanliggende hoeken,
b. in een hoogtelijn en de drie hoeken,
c. in een zwaartelijn en de deelen, waarin deze een hoek van den driehoek verdeelt,
d. in de bissectrix uit A en de hoeken B en C.
e. Druk de oppervlakte van een parallelogram uit in een diagonaal en de beide hoeken, die die diagonaal in een harer uiteinden met de aangrenzende zijden maakt.

454. Bepaal, hoeveel de oppervlakte van een driehoek met twee zijden a en b en den ingesloten hoek γ toe- of afneemt, als men dien hoek bij onveranderde grootte der zijden a en b met δ laat toenemen.

455. Van een driehoek met de zijden $a = 3{,}678$ en $b = 7{,}356$ en $\gamma = 67° 13' 25''$ wil men een gelijkbeenigen maken met een tophoek, $2 \times$ zoo groot als γ. Bepaal het been en de basis van dien driehoek.

456. In vierhoek ABCD deelt de diagonaal AC $= 25$ $\angle$ BAD $= 87° 25'$ middendoor; de zijden AB en AD zijn respectievelijk 13 en 22. Bepaal de oppervlakte van dien vierhoek.

457. Als in $\triangle$ ABC gegeven is AB $= 18{,}9$; BC $= 14{,}5$ en $\angle$ B $= 50° 27'$, bepaal dan de oppervlakken der deelen, waarin die driehoek door de bissectrix uit C wordt verdeeld.

458. Van een driehoek is de oppervlakte voorgesteld door $\frac{1}{5}ab$, terwijl gegeven is $a : b = 2 : 3$. Bepaal de hoeken van dien driehoek.

459. Als de oppervlakte van een driehoek voorgesteld is door $\frac{1}{6}ab$ en ook door $\frac{1}{3}bc$, druk dan die oppervlakte uit in a en c.

---

b. Om- en ingeschreven cirkel.

460. Gegeven zijn de straal van den omgeschreven cirkel van een driehoek, = 30, en twee zijner hoeken, 38° 17′ en 100° 25′. Bereken:

a. de zijden,
b. den straal van den ingeschreven cirkel,
c. zijn oppervlakte.

461. Bepaal den straal van den om- en dien van den ingeschreven cirkel van een driehoek, als gegeven zijn:

a. $a = 25{,}304$; $\beta = 40°25'40''$; $\gamma = 35°11'12''$;
b. $c = \sqrt{0{,}5}$; $\cos\gamma = \frac{1}{3}$; $\alpha = 55°10'$;
c. $b = 18{,}034$; $c = 28.034$; $\alpha = 30°$;
d. $a = 20$; $c = 18$; $\gamma = 40°13'20''$.

462. Van een driehoek zijn gegeven een zijde = 25,374; de overstaande hoek = 39° 30′ 18″ en een aanliggende hoek = 40° 17′. Bereken de afstanden van het middelpunt van den omgeschreven cirkel tot de beide andere zijden.

463. Druk de oppervlakte van een driehoek uit in den straal van den omgeschreven cirkel en twee hoeken (voor logarithmische berekening geschikt).

464. Druk de stralen der aangeschreven cirkels van een driehoek uit in een zijde en de beide aanliggende hoeken (twee gevallen).

465. Druk in den straal van den omgeschreven cirkel en de drie hoeken van een driehoek uit:

a. den straal van den ingeschreven cirkel,
b. de stralen van de aangeschreven cirkels.

466. Te bewijzen, als r_a den straal van den aangeschreven cirkel aan de zijde a, enz. voorstelt:

a. $\frac{r}{r_a} = \text{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\text{tg}\,\frac{\gamma}{2}$; ....,

b. $\frac{r_a}{r_b} = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{cot}\,\frac{\beta}{2}$; ....,

c. $r : r_a : r_b : r_c = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\text{tg}\,\frac{\gamma}{2} : \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} : \text{tg}\,\frac{\beta}{2} : \text{tg}\,\frac{\gamma}{2}$.

(Het ontbrekende zelf in te vullen).

467. Gegeven twee zijden van een driehoek, = 30 en 36, en de afstand = 16 van het middelpunt van den ingeschreven cirkel tot de eerste dezer zijden. Bepaal de derde zijde.

468. Gegeven de straal van den ingeschreven cirkel van een driehoek, = 15, en de verbindingslijnen van het middelpunt van den ingeschreven cirkel met twee hoekpunten, = 25 en 45. Bereken de verbindingslijn met het derde hoekpunt.

469. Van een driehoek is gegeven de omtrek = 25,49, $\angle$ A = 50°40′ 12″ en de afstand = 5,845 van A tot het raakpunt van den ingeschreven cirkel op AB. Bereken den straal van den

a. ingeschreven cirkel, *b.* omgeschreven cirkel.

470. Van een driehoek is de omtrek 50, een zijde 13 en de straal van den ingeschreven cirkel 6. Bepaal den straal van den omgeschreven cirkel.

471. Van een driehoek is gegeven de omtrek = 50,98; de hoek, dien de bissectrices uit A en B met elkaar vormen = 115° 20′ 6″ en de straal van den omgeschreven cirkel = 11,095. Bereken:

a. de zijde *c*, *b.* den straal van den ingeschreven cirkel.

472. Te bewijzen in een driehoek (verg. No. 623 voor de beteekenis van r_a enz.):

a. $\text{tg}\,\alpha = \frac{2r\,(s - a)}{(s - a + r)\,(s - a - r)}$; ....,

b. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2r_a s}{(s + r_a)(s - r_a)} = \dfrac{2r_b (s - c)}{(r_b + s - c)(r_b - s + c)}$

$= \dfrac{2 r_c (s - b)}{(r_c + s - b)(r_c - s + b)}$; .....

(Het ontbrekende zelf in te vullen).

473. Van een raaklijnvierhoek ABCD is gegeven $\angle$ A = 70° 54′ 10″, de stukken AE = 25,34 en EB = 15,47 waarin de zijde AB door den ingeschreven cirkel verdeeld wordt, en het stuk CF = 10,93, als F het raakpunt op de zijde CD is. Bepaal de onbekende zijden en hoeken.

474. Van een koordenvierhoek ABCD is gegeven AB = 15,23; $\angle$ BDA = 65° 34′ 10″; $\angle$ BAC = 16° 17′ 50″; $\angle$ BCD = 110° 25′. Bereken de onbekende elementen.

475. Als van een driehoek gegeven zijn twee hoeken en de straal van den ingeschreven cirkel, druk dan in deze gegevens (voor logarithmische berekening geschikt) uit:

a. de oppervlakte van den driehoek, die de raakpunten van den ingeschreven cirkel met de zijden tot hoekpunten heeft,

b. den omtrek van dezen driehoek.

476. *a.* Van een driehoek zijn gegeven de hoeken β en γ en de verbindingslijn p van de raakpunten van den ingeschreven cirkel aan de zijden b en c. Bereken (voor logarithmische bewerking geschikt) de oppervlakte van dezen driehoek.

b. Dezelfde opgave voor de getallengegevens β = 79° 13′ 24″, γ = 50° 22′ 36″, p = 11,897 cM.

---

§ 20. Herhaling 3.

477. In een rechthoekigen driehoek is een rechthoekszijde 1,6783 en de bissectrix van den rechten hoek 0,9583. Bereken de andere rechthoekszijde.

478. Als A + B + C = 90°, schrijf dan eenvoudiger

$$\frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\cos C}.$$

479. Bewijs; dat men in iederen driehoek met de zijden a, b en c en de hoeken α, β en γ heeft

$$a.\ \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} = \frac{s-b}{s-a} \times \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\quad c.\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2s(s-a)-bc},$$

$$b.\ \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{s-a}{s-b} \times \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\quad d.\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a+b}{c} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}}.$$

480. In een rechthoekigen driehoek is de schuine zijde AB = 16,314 en de rechthoekszijde AC ≐ 9,952. Als D het midden is van AC en E een punt op AB zoodat AE = $\frac{2}{3}$ AB, bereken dan ∠ EDC.

481. Een waarnemer op het dak van een huis ziet den top van een 123 M. hoogen toren onder een hoek van 25° 17′ 38″ met de horizontaal, den voet onder een hoek van 6° 32′ met de horizontaal. Op welke hoogte bevond hij zich zelf?

482. Van een koordenvierhoek ABCD is gegeven de straal van den omgeschreven cirkel = 25, voorts ∠ A = 130°, AB = 15, BC = 35. Bereken de onbekende hoeken en zijden.

483. Trekt men in △ ABC, waarin AB < AC en AD een hoogtelijn is, een lijn AE zoodat ∠ BAD = ∠ DAE, bewijs dan dat men heeft:

$$a.\ \frac{\sin CAE}{\sin CAB} = \frac{CE}{CB};$$

$$b.\ CE^2 = CA^2 + AB^2 - 2\,CA \times AB \cos(B - C).$$

484. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, te bewijzen:

$$a.\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$b.\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

485. De diagonalen AC en BD van een regelmatigen zeshoek ABCDEF snijden elkaar in P. Men wil op boog BFD een punt bepalen, wanneer men de stukken BP en PD ziet onder hoeken, die zich verhouden als die stukken. Bepaal, op welken afstand dit punt van A moet liggen, als de straal van den cirkel 3 is.

486. Als de zwaartelijnen van $\triangle$ ABC de hoeken A, B en C in de stukken A_1 en A_2, B_1 en B_2, C_1 en C_2 verdeelen (rondgaande), bewijs dan dat men heeft

$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1}\sin A = \frac{\sin B_1}{\sin B_2}\sin B; \quad \frac{\sin B_2}{\sin B_1}\sin B = \frac{\sin C_1}{\sin C_2}\sin C;$$

$$\frac{\sin C_2}{\sin C_1}\sin C = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}\sin A.$$

487. In $\triangle$ ABC, waarin AB = 10 en AC = 15 is, trekt men AD, zoodat $\angle$ DAB $= \frac{1}{3} \angle$ CAB. Als deze lijn den driehoek in deelen verdeelt, die zich verhouden als 4 : 9, bereken dan $\angle$ CAB.

488. Van een vierhoek, waarin en waarom een cirkel beschreven kan worden, maken de rechten, die het middelpunt van den ingeschreven cirkel met twee opeenvolgende hoekpunten verbinden, een hoek van 96° 52′ 12″ met elkaar en hebben een lengte van 8 cM en 5 cM. Bepaal de oppervlakte van dezen vierhoek.

489. *a.* Van een driehoek zijn gegeven twee hoeken β en γ en het stuk q tusschen het hoekpunt A en het raakpunt van den ingeschreven cirkel op de zijde AC. Bereken (voor logarithmische bewerking geschikt) de oppervlakte van den driehoek, die door verbinding der 3 raakpunten van den ingeschreven cirkel op de drie zijden ontstaat.

b. Dezelfde opgave voor de getallengegevens $\beta = 79° 13' 24''$, $\gamma = 50° 22' 36''$, $q = 12{,}308$ cM.

E. GONIOMETRISCHE VERGELIJKINGEN.

§. 21. Goniometrische vergelijkingen.

Theorie.

a. Kwadranten.

Een *goniometrische vergelijking* is een vergelijking, waarin de onbekende als hoek in een of meer goniometrische verhoudingen voorkomt.

Bijv. $\sin^2 x + \operatorname{tg}(x - 15^\circ) - \sec 3x = 5$

is een goniometrische vergelijking in de onbekende x.

De eenvoudigste goniometrische vergelijkingen zijn van de volgende vormen :

Eerste voorbeeld. $\sin x = -0{,}9.$

Men lost deze vergelijking op door gebruikmaking van de tafels, in verband met wat in § 13 over het teeken van de goniometrische verhoudingen in verschillende kwadranten gezegd is.

Volgens Form. 47 heeft men nl. $\sin x = -\sin(-x)$; de vergelijking wordt daardoor

$$\sin(-x) = +0{,}9$$

met de oplossing

$$\log \sin(-x) = \log 0{,}9 = 9{,}95424 - 10$$

$$-x = 64^\circ 9' 30'' \pm k \times 360^\circ \quad \text{of} \quad -x = 115^\circ 50' 30'' \pm k \times 360^\circ,$$

want het supplement heeft denzelfden sinus als de hoek. Uit de beide vergelijkingen volgt

$$x = 295^\circ 50' 30'' \pm k \times 360^\circ \quad \text{of } 244^\circ 9' 30'' \pm k \times 360^\circ$$

en de *tusschen 0° en 360°* gelegen waarden van x zijn

$$244^\circ 9' 30'' \text{ en } 295^\circ 50' 30''.$$

Tweede voorbeeld. $\cos 3x = \sqrt{0{,}3}$

Oplossing. $\log \cos 3x = \frac{1}{2} \log 0{,}3 = 9{,}73856 - 10$

$$3x = 56^\circ 47' 21'' \pm k \times 360^\circ \quad \text{of } 3x = -56^\circ 47' 21'' \pm k \times 360^\circ,$$

want de negatieve hoek heeft denzelfden cosinus als de positieve (Form 48).

Dus

$$x = 18^\circ 55' 47'' \pm k \times 120^\circ \quad \text{of } x = -18^\circ 55' 47'' \pm k \times 120^\circ,$$

en de tusschen 0° en 360° gelegen waarden van x zijn

$$x = 18^\circ 55' 47'' \qquad 138^\circ 55' 47'' \qquad 258^\circ 55' 47''$$
$$101^\circ 4' 13'' \qquad 221^\circ 4' 13'' \qquad 341^\circ 4' 13''.$$

De uit den tweeden vorm voor x volgende waarden zijn op den tweeden regel geplaatst, naar grootte tusschen die van den eersten regel in.

Derde voorbeeld. $\operatorname{tg}(5x + 10^\circ) = -0{,}1.$

Oplossing. $\operatorname{tg}(-5x - 10^\circ) = 0{,}1,$

(omdat de negatieve hoek den tegengestelden tangens heeft, form. 49)

$$\log \operatorname{tg}(-5x - 10^\circ) = 9 - 10$$
$$-5x - 10^\circ = 5^\circ 42' 38'' \pm k \times 180^\circ.$$

Hier wordt 180° bijgevoegd of afgetrokken, en niet 360°, omdat de tangens reeds na 2 kwadranten weer hetzelfde teeken heeft (Form. 53).

Verder volgt $-5x = 150° 42' 38'' \pm k \times 180°$

$x = -3° 8' 32'' \pm k \times 36°$

met de volgende waarden tusschen 0° en 360°:

32° 51′ 28″, 68° 51′ 28″, 104° 51′ 28″, ..., 356° 51′ 28″.

---

b. Kwadrant-verband.

Voorbeeld. Op te lossen

$$\sin(3x + 15°) = \sin(5x - 45°).$$

Daar de sinussen van twee hoeken gelijk zijn, als de hoeken gelijk zijn (of een aantal malen 360° verschillen), of als zij supplementair zijn (of daarbij nog een aantal malen 360° verschillen), heeft men de volgende oplossingen:

$3x + 15° = 5x - 45° \pm k \times 360°$ of $3x + 15° = 180° - (5x - 45°) \pm k \times 360°$.

$2x = 60° \pm k \times 360°$ $\qquad$ $8x = 210° \pm k \times 360°$

$x = 30° \pm k \times 180°$, $\qquad$ $x = 26° 15' \pm k \times 45°$

en de volgende waarden tusschen 0 en 360°:

$x =$ 30° 210°

26° 15′ 71° 15′ 116° 15′ 161° 15′ 206° 15′ 251° 15′ 296° 15′ 341° 15′,

---

c. In één goniometrische verhouding.

Wanneer in een goniometrische vergelijking enkel goniometrische verhoudingen voorkomen, die alle in één van hen, of alle in een enkele andere goniometrische verhouding uit te drukken zijn, dan verandert door deze uitdrukking de vergelijking in een algebraïsche vergelijking met één onbekende (nl. de goniometrische verhouding. waarin is uitgedrukt), die opgelost kan worden, waarna men het geval *a*) heeft.

Voorbeeld. $(\sec^2 x + 1) \cot x = 3.$

Oplossing. De secans kan uitgedrukt worden in den tangens: $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ de cotangens insgelijks in den tangens: $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Daardoor wordt de vergelijking, na vermenigvuldiging met $\operatorname{tg} x$ ter verdrijving der breuken:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

een vierkantsvergelijking in $\operatorname{tg} x$ met de wortels

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 2 \text{ of } 1.$$

Beide waarden zijn bruikbaar, omdat de tangens alle mogelijke waarden kan aannemen. Verder heeft men dus

$\operatorname{tg} x = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = 2$

$x = 45° \pm k \times 180°$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} x = 0{,}30103$

$x = 63° 26' 6'' \pm k \times 180°$

en de oplossingen tusschen 0° en 360° zijn

$x =$ 45° 225°

63° 26′ 6″ 243° 26′ 6″.

Opmerking. Daar alle goniometrische verhoudingen van een hoek rationeel uit te drukken zijn in den tangens van den halven hoek (zie No. 266), leent zich de tangens van den halven hoek dikwijls in het bijzonder tot het gebruik als enkele onbekende, waarvan hierboven gesproken werd.

Voorbeeld. Op te lossen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \operatorname{cosec} = 2.$$

Oplossing. Drukt men $\operatorname{cosec} x$ in $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ uit: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x} =$

$$\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}},$$

dan wordt de vergelijking

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 2$$

of, na herleiding

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$$

met de oplossingen

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = 1 \text{ of } \frac{1}{3};$$

dus

$$\frac{x}{2} = 45^\circ \pm k \times 180^\circ \qquad \text{of} \qquad \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 9{,}52288 - 10$$

$$x = 90^\circ \pm k \times 360^\circ \qquad \frac{x}{2} = 18^\circ 26' 6'' \pm k \times 180^\circ$$

$$x = 36^\circ 52' 12' \pm k \times 360^\circ$$

en tusschen 0° en 360^0:

$$x = 90^0 \text{ of } 36^0 52' 12''.$$

---

a. Homogene vergelijkingen in $\sin x$ en $\cos x$.

Voorbeeld. Op te lossen

$$10 \sin^3 x - 21 \sin^2 x \cos x - 10 \sin x \cos^2 x = 0$$

Oplossing. Deze vergelijking is homogeen van den derden graad in $\sin x$ en $\cos x$. Na deeling door $\cos^3 x$ (evenals men dat in de algebra doet bij 1 homogene vergelijking met 2 onbekenden) neemt zij den vorm aan

$$10 \operatorname{tg}^3 x - 21 \operatorname{tg}^2 x - 10 \operatorname{tg} x = 0.$$

Na uitdeeling van den factor $\operatorname{tg} x$, waarbij men te stellen heeft

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

$$\text{dus } x = 0 \pm k \times 180^0,$$

krijgt men

$$10 \operatorname{tg}^2 x - 21 \operatorname{tg} x - 10 = 0 \qquad (1)$$

met de oplossingen

$$\operatorname{tg} x = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{20} = \frac{21 \pm 29}{20} = \frac{5}{6} \text{ of } -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = 2{,}5 \qquad \text{of} \qquad \operatorname{tg}(-x) = \frac{2}{5},$$

$$\log \operatorname{tg} x = 0{,}39794 \qquad \log \operatorname{tg}(-x) = 9{,}60206 - 10$$

$x = 68^0 11' 55'' \pm k \times 180^0$; $x = -21^0 48' 5'' \pm k \times 180^0$ of $158^0 11' 55'' \pm k \times 180^0$

(De gevonden waarden verschillen, afgezien van de toevoeging $\pm k \times 180^0$, 90^0. Dit is, doordat in de vergelijking (1) de term met $\operatorname{tg}^2 x$ en de bekende term tegengesteld gelijke coëfficienten (10 en — 10) hebben; daardoor wordt het produkt der wortels $= \frac{-10}{10} = -1$, dus, als de wortels $\operatorname{tg} x_1$ en $\operatorname{tg} x_2$ zijn, $\operatorname{tg} x_1 \times \operatorname{tg} x_2 = -1$, $\operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} x_1} = -\cot x_1 = +\operatorname{tg}(90^0 + x_1)$; dus $x_2 = 90^0 + x_1$).

De beide gevonden waarden laten zich brengen in den gemeenschappelijken vorm

$$x = 68^0 11' 55'' \pm k \times 90^0$$

en de oplossingen tusschen 0^0 en 360^0 zijn (met de reeds gevonden oplossing $x = 0 \pm k \times 180^0$ mee)

$$x = 0, \quad 68^0 11' 55'', \quad 180^0, \quad 158^0 11' 55'', \quad 248^0 11' 55'', \quad 338^0 11' 55'', \quad 360^0.$$

Men heeft dus het volgende

Recept. Als een vergelijking *homogeen* is naar cosinus en sinus van eenzelfden hoek: *voer den tangens in.*

---

e. Cosinus- en sinus-sommen.

Voorbeeld. Op te lossen de vergelijking

$$\sin x - \sin 2x + \cos x - \cos 2x = 0.$$

Oplossing. Van de eerste twee termen is een *produkt* te maken:

$$\sin x - \sin 2x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$$

Eveneens van de laatste twee:

$$\cos x - \cos 2x = -2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}.$$

Daardoor krijgt de vergelijking

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0$$

een factor $\sin \frac{x}{2}$, dien men eruit kan deelen na stellen van

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = 0 \pm k \times 180^0,$$

$$x = 0 \pm k \times 360^0. \qquad (1)$$

De overblijvende vergelijking

$$\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} = 0$$

is homogeen naar $\cos\frac{3x}{2}$ en $\sin\frac{3x}{2}$ en wordt dus volgens *d*) behandeld; zij levert

$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 1$$

dus

$$\frac{3x}{2} = 45^0 \pm k \times 180^0,$$

$$x = 30^0 \pm k \times 120^0 \quad (2).$$

De gevonden waarden tusschen 0^0 en 360^0 zijn:

$$x = 0^0, \qquad 360^0.$$

$$30^0, 150^0, 270^0,$$

---

f. Dubbele hoek.

Voorbeeld. Op te lossen de vergelijking

$$3 \sin^2 x\,(1 + 4 \cos^2 x) + 20 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

Oplossing. In deze vergelijking komen alleen vormen voor, die naar $\sin x$ en $\cos x$ *van den tweeden graad* zijn. Dáar in de formules voor $\sin 2x$ en $\cos 2x$: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ alle tweede leden van den tweeden graad zijn, ligt het voor de hand, om te trachten, vormen van den tweeden graad in sinus en cosinus van den eersten graad te maken door den dubbelen hoek $2x$ in te voeren. Dit kan inderdaad geschieden door de formules (zie form. 30 en 31)

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Daardoor wordt de gegeven vergelijking, na herleiding

$$-3 \cos^2 2x + 10 \sin 2x + 6 = 0.$$

Hierin is, volgens *c*, gemakkelijk $\cos^2 2x$ rationeel in $\sin 2x$ uit te drukken: $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$, waardoor de vergelijking wordt.

$$3 \sin^2 2x + 10 \sin 2x + 3 = 0$$

met de oplossingen

$$\sin 2x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = -3 \text{ of } -\frac{1}{3}.$$

De eerste waarde moet verworpen worden, omdat $\sin 2x$ in absolute waarde niet grooter dan 1 kan zijn. De tweede levert

$$\sin(-2x) = \frac{1}{3},$$

$$\log \sin(-2x) = 9{,}52288 - 10$$

$$-2x = 19^0 28' 17'' \pm k \times 360^0 \text{ of } -2x = 160^0 31' 43'' \pm k \times 360^0$$

$$x = -9^0 44' 8'' \pm k \times 180^0 \qquad x = -80^0 15' 52'' \pm k \times 180^0$$

met de oplossingen tusschen 0^0 en 360^0:

$$x = \qquad 170^0 15' 52'', \qquad 350^0 15' 52''.$$

$$99^0 44' 8'', \qquad 279^0 44' 8'',$$

Wij hebben dus het volgende

Recept. Als een vergelijking alleen termen van den *tweeden graad* in sinus en cosinus van een zelfden hoek bevat: *voor den dubbelen hoek in.*

---

g. Hulphoek.

Eerste voorbeeld. Op te lossen de vergelijking

$$\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x = 2, \qquad (1)$$

waarin φ een bekende hoek is, bijv. $\varphi = 70^0$.

Oplossing. Vermenigvuldigt men, ter verdrijving van breuken $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$ met $\cos \varphi$, dan wordt de vergelijking

$$\cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x = 2 \cos \varphi.$$

Hierin is het eerste lid gelijk aan $\cos (x - \varphi)$; dus

$$\cos (x - \varphi) = 2 \cos \varphi,$$

of, bij de gegeven waarde van φ,

$$\cos (x - 70^0) = 2 \cos 70^0$$

$$\log \cos (x - 70^0) = \log 2 + \log \cos 70^0 = 9{,}83508 - 10$$

$$x - 70^0 = \pm 46^0\, 50'\, 37'' \pm k \times 360^0$$

enz.

Was nu niet gegeven geweest de vergelijking (1), maar bijv.

Tweede voorbeeld. $\cos x + 3 \sin x = 2, \qquad (2)$

dan zou deze vergelijking wel niet den vorm gehad hebben van de vergelijking (1), maar zij zou dien vorm hebben kunnen krijgen door 3 te vervangen door $\operatorname{tg} \varphi$, waarbij φ even goed bekend geweest zou zijn als in (1); men zou dan nl. hebben

$$\operatorname{tg} \varphi = 3$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0{,}47712$$

$$\varphi = 71^0\, 33'\, 54''$$

(toevoeging van $k \times 180^0$ overbodig;) zij zou daardoor geworden zijn

$$\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x = 2$$

met geheel dezelfde oplossing als in het eerste voorbeeld, met het eenige verschil, dat φ nu de waarde $71^0\, 33'\, 54''$ heeft in plaats van 70^0.

De hoek φ wordt dan de *hulphoek* genoemd. Hij kan dus gebruikt worden in vergelijkingen, die zijn van den vorm

$$A \cos x + B \sin x = C,$$

dat zijn dus vergelijkingen, die van den eersten graad zijn naar cosinus en sinus van eenzelfden hoek. Na deeling door A wordt die vergelijking nl.

$$\cos x + \frac{B}{A} \sin x = \frac{C}{A}$$

en door het stellen van

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi$$

en vermenigvuldiging met $\cos \varphi$;

$$\cos (x - \varphi) = \frac{C}{A} \cos \varphi, \qquad \text{enz.}$$

Men kan ook door B deelen en $\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\varphi$ stellen, waardoor men sin $(x + \varphi)$ zou vinden.

Op deze wijze wordt het overbodig, cos x in sin x of omgekeerd uit te drukken, hetgeen aanleiding zou geven tot irrationeele vormen, en, bij verdrijving daarvan door kwadrateering, tot invoeren van wortels.

Opmerking. Men zou de vergelijking (2) ook, doch niet zoo eenvoudig, volgens de bij c) gemaakte *Opmerking* kunnen behandelen.

Vraagstukken.

Kwadranten.

490. Op te lossen:

a. $\cos x = -\frac{5}{7}$ *d.* $\sec(\frac{1}{2}x - 20°) = -5$,

b. $\sin 2x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, *e.* $4\cos x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

c. $\operatorname{tg}(20° - x) = -3\frac{1}{3}$, *f.* $4\sin(\frac{3}{5}x + 9°) = \sqrt{2} - \sqrt{6}$.

491. Op te lossen:

a. $\cot^2(9x + 10°) = 8$,

b. $\operatorname{cosec}^4(45° - \frac{4}{5}x) = 324$,

c. $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} = 0$,

d. $6\cos^2 5x - \cos 5x = 1$,

e. $4\sin^2(30 - 3x) + 17\sin(30° - 3x) + 4 = 0$,

f. $4\cos x\cot x - 2\sqrt{3}(\cos x + \cot x) + 3 = 0$,

g. $10\sec^2\frac{2}{3}x\operatorname{cosec}^2 x - 4\sec^2\frac{2}{3}x - 25\operatorname{cosec}^2 x + 10 = 0$.

---

b. Kwadrant-verband.

492. Op te lossen:

a. $\sin 4x = \sin(6x - 20°)$, *d.* $\sec\frac{2}{3}x = \sec\frac{5}{6}x$,

b. $\cos 2x = \cos(50° - 3x)$, *e.* $\cot(px - qa) = \cot(qx - pa)$.

c. $\operatorname{tg}(2x - 10°) = \operatorname{tg}(5x - 28°)$,

493. Op te lossen:

a. $\sin 3x = -\sin 2x$, *d.* $\cot(0{,}3x - 30°) = -\cot(-0{,}6x)$,

b. $\cos 5x + \cos 3x = 0$, *e.* $\operatorname{cosec}(x - C\alpha) = -\operatorname{cosec}(Cx - \alpha)$.

c. $\operatorname{tg}(3x - 15°) = -\operatorname{tg}(30° + 6x)$,

494. Op te lossen:

a. $\sec(5x - 6^\circ)\cos(x - 12^\circ) = 1,$

b. $\dfrac{\sin(6x - 14^\circ)}{\sin(2x - 13^\circ)\cos(2x - 13^\circ)} = -2,$

c. $\sin^2 2x \operatorname{cosec}^2 3x = 1,$

d. $\sin 5x = \cos 7x,$

e. $\sec(2x - 30^\circ) + \operatorname{cosec}(3x + 40^\circ) = 0,$

f. $\{\cot(nx + x) - \operatorname{tg}(nx + x)\}\sin(nx + x) = 0,$

g. $\operatorname{tg} nx + \cot(mx + a) = 0,$

h. $\left(\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\cot 7x}\right)^2 = 1.$

---

c. In één goniometrische verhouding.

495. Op te lossen:

a. $6\sin^2 x = -5\cos x,$

b. $\sec^2 x + 9\operatorname{tg} x = 11,$

c. $\operatorname{cosec} x + \sin x = 3\frac{1}{3},$

d. $3\operatorname{tg} x - 7\cot x = 20,$

e. $\sin^2 x + \cot^2 x = 2\frac{1}{3},$

f. $\sin x \sec x - \cos x \operatorname{cosec} x = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

496. Op te lossen:

a. $\sqrt{3}\cos 2x = \cos x,$

b. $3\sin 2x = \sin x,$

c. $9\operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} x = 0,$

d. $\sin^2 2x + 0{,}4\cos 2x = 0{,}4,$

e. $4\operatorname{tg} x + 10\cos x - 16\frac{2}{3}\sin 2x = 10\sec x,$

f. $2\cos 2x - 15\sin 3x = 2,$

g. $\operatorname{tg} 3x = (2 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x.$

497. Op te lossen:

a. $2\sin^2 5x - 1 = 0,$

b. $\cos 4x(\cos 4x - a^2) = \cos 4x,$

c. $\operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 3x = 0,$

d. $3\operatorname{cosec} 2x = 1 + \cot^2 2x,$

e. $3\operatorname{cosec} 2x = 1 + \cot^2 x,$

f. $5\operatorname{tg}(4x + 30^\circ) - 2\cot(4x + 30^\circ) = -3,$

g. $\sin 2x \operatorname{tg} 2x - \operatorname{cosec} 2x \cot 2x = -\frac{5}{6}.$

498. Op te lossen:

a. $20\,(\sin x + \operatorname{tg} x) + 9 \cot \frac{1}{2} x = 0,$

b. $\sec x + \operatorname{tg} x = 2\,(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x),$

c. $2 \cos 3x - 3 \cot 3x \operatorname{tg} 1\frac{1}{2}x = 2,$

d. $10 \sin x + 5 \cos x = 11,$

e. $9 \sin (15^\circ - 3x) + 7 \cos (15^\circ - 3x) + 11 = 0,$

f. $5 \sin 2x + 15 \cos^2 x = 17 \cos x.$

---

d. Homogeen in sinus en cosinus.

499. Op te lossen:

a. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 7,$

b. $6 \cos^2 x = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x,$

c. $\dfrac{\sin 3x}{2 \sin 3x + \cos 3x} + 2 \operatorname{tg} 3x = -1,$

d. $\sin^2 x\,(\sin x + 9{,}1 \cos x) = \cos^2 x\,(9{,}1 \sin x + \cos x).$

500. Op te lossen:

a. $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x,$

b. $4 \operatorname{cosec} x + 7 = \dfrac{7 \cos x}{1 + \cos x},$

c. $25 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \sec x = 1.$

501. Op te lossen:

a. $\sin (x - 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cos x,$

b. $\sqrt{2} \sin (x + 45^\circ) = \sqrt{3} \cos (x - 30^\circ),$

c. $\cos (x + 10^\circ) = \dfrac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} \cos (x - 70^\circ).$

---

e. Cosinus- en sinussommen.

502. Op te lossen:

a. $\sin 7x + \sin 5x = \sin 6x,$

b. $5 \cos (3x + 40^\circ) - 5 \cos (3x - 40^\circ) = 4,$

c. $1 + 2 \cos 2\frac{1}{2}x + 2 \cos 1\frac{1}{2}x = 2 \cos^2 x,$

d. $\sin 5x \cos 5x - \sin x \cos x = \sin 2x - 2 \sin 2x \sin^2 3x.$

503. Op te lossen:

a. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$,

b. $\sin 7x - \cos 7x = \sin 2x - \cos 2x$,

c. $\sin x + \sin nx = \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \cos nx$.

---

f. Dubbele hoek.

504. Op te lossen:

a. $\operatorname{tg}^2 x - 6\sqrt{2} \sin x \cos x - \sec^2 x = -4$,

b. $5 (\operatorname{tg} x - \cot x) \sin 2x = 3$,

c. $\cos x (\cos x + \sin x) - \sin x (\sin x - 4 \cos x) = 0$,

d. $2 \sin x \operatorname{tg} x - \sec x = 3 \cos x$,

e. $\sin^2 x + 9 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 5\frac{1}{2}$.

505. Op te lossen:

a. $\operatorname{tg} 3x (1 + 9 \cos^2 3x) + \cot 3x = 6$,

b. $7 (\sec^2 2x - \operatorname{cosec}^2 2x) = 48$,

c. $\cos^7 \varphi + \sin^7 \varphi + (\cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi =$
$= 0{,}925 (\cos \varphi + \sin \varphi)$.

---

g. Hulphoek.

506. Op te lossen:

a. $\sin x - 2 \cos x = 2$,

b. $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = -2$,

c. $2 \sin 3x = 3 - 4 \sin (90^\circ + 3x)$,

d. $5 + \operatorname{tg} (2x + 30^\circ) = -\sec (2x + 30^\circ)$.

507. Op te lossen:

a. $4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{1 + \cos x} = 1$,

b. $\sin^2 x - 9 \cos^2 x = 2 \sin x - 6 \cos x$,

c. $10 \cos (x + 60^\circ) + 24 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} +$
$20 \cos^2 \left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 7$,

d. $\cos x (1 - \operatorname{tg}^2 41^\circ) + 2 \sin x \operatorname{tg} 41^\circ = 3 - 3 \operatorname{tg}^2 41^\circ$,

e. $(\operatorname{tg} 13^\circ - 1) (\sin x + \sqrt{2}) + (\operatorname{tg} 13^\circ + 1) \cos x = 0$.

---

h. Gemengd.

508. Op te lossen:

a. $2\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 15^\circ) = \sec x$,

b. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = -8 \sin 3x \cos x$,

c. $2\,\{\operatorname{tg}(2x + 35^\circ) - \operatorname{tg} x\} = 3\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 35^\circ)$,

d. $\cot 2\tfrac{1}{2}x - \operatorname{tg} 1\tfrac{1}{2}x = \cos 4x \operatorname{cosec} 5x \sec 1\tfrac{1}{2}x$,

e. $\cot 5x + \operatorname{tg} x = 6\,(\sec x - 8 \cos x \sin^2 x)$.

509. Op te lossen:

a. $\cot^3 x - 2 \cot x = 0$,

b. $\sec 3x = \operatorname{cosec} 5\,(180^\circ - x)$,

c. $\sqrt{\sin x} = \operatorname{tg} x$,

d. $\sin \tfrac{1}{2} x + 5 \cos \tfrac{1}{2} x = 5$,

e. $5 \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}^3 x$.

510. Op te lossen:

a. $\cos^2 5x = \cos(180^\circ - 5x) \cos(7x - 180^\circ)$,

b. $\operatorname{cosec} x - 2 \sec x = \operatorname{cosec} x \sec x$,

c. $\sin^2 x\,(5 \sin x + 23 \cos x) = 10 \sin x \cos^2 x$.

511. Op te lossen:

a. $\operatorname{tg} 5x \sin 6x - \cot 3x \sin 9x = \cot 3x \sin 6x - \operatorname{tg} 5x \sin 9x$,

b. $3 \operatorname{tg} x \sin x + 10 \sin x - 3 \cot 3x \sin x - 10 \cot 3x \cos x = 0$,

c. $3\,(\cos^2 x \operatorname{cosec}^2 x - \sin^2 x \sec^2 x) - 10\sqrt{3} \cos x \operatorname{cosec} x - 2\sqrt{3} \sin x \sec x + 24 = 0$.

512. Op te lossen:

$\sin^4 2x + \cos^4 2x + 6 \sin^2 2x \cos^2 2x + \frac{2}{3} \sin 4x = 1\frac{1}{3}$.

513. Op te lossen:

a. $\sqrt{3} \cos x\,(\sqrt{3} \cos x + \sin x) = 2 + 3 \sin x \left(\sin x - \dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)$,

b. $\cos^3 x + \sin^3 x + (\cos x + \sin x)^3 = 6 \cos^3 x + 6 \cos^2 x \sin x + \cos x + \sin x$.

514. Op te lossen:

a. $\sin(240^\circ - 5x) \sec(240^\circ - 5x) = 2 \operatorname{tg}(210^\circ + 5x)$,

b. $\dfrac{\cos(300^\circ - 3x) \sin(330^\circ + 3x)}{\sin(72^\circ - 3x) \sec(18^\circ + 3x)} + \frac{1}{3} = 0$.

515. Op te lossen:

a. $\cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi = \frac{7}{8} \cos 2 \varphi$,

b. $\cos^4 \varphi - \frac{1}{15}\sqrt{3} = \sin^4 \varphi - \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin \varphi \cos \varphi$.

---

§ 22. Herhaling 4.

516. Bewijs, dat men in een driehoek heeft.

a. $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{c} \sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,b}}$,

b. $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a+b}{c} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}}$,

c. $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$.

517. Van een opgelaten vlieger, die 3 M hoog is, ziet men de bovenste helft der as onder een hoek van 15′ 5″ en de onderste helft onder een hoek van 14′ 55″. Als de oogstraal naar het midden der as een hoek van 23° 5′ met den horizon maakt en het oog van den waarnemer 1,67 M boven den grond is, hoe hoog is dan het midden van den vlieger boven den grond?

518. Op te lossen:

a. $\sec^2 2x (\sin 4x + \cos 4x) = 2$.

b. $3 \sin^4 x - 10 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x = 0$.

519. Druk alle goniometrische verhoudingen van α uit in $\cot \frac{\alpha}{2}$.

520. Op te lossen:

a. $(\sin 3x - 1) \sin 3x = (1 - \sin 3x) \sin (-5x)$,

b. $1 + \operatorname{cosec} x = -5 \cos x \operatorname{cosec} x$,

c. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0{,}4$.

521. Bewijs, dat de som der afstanden van het middelpunt van den omgeschreven cirkel (straal R) tot de zijden b en c gelijk is aan $2R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$ of aan $\dfrac{a \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}}$.

522. Op te lossen:

a. $\sin 4x \operatorname{tg} x - \cos 8x \operatorname{tg} 7x = \cos 8x \operatorname{tg} x - \sin 4x \operatorname{tg} 7x$,

b. $2 \sin x \cos x - 10 \operatorname{tg}^2 x (1 + \cos 2x) + 5 = 0$.

523. Een vliegtuig bevindt zich loodrecht boven een recht baanvak van een spoorweg, lang 2400 M. Als de einden van dat vak uit het vliegtuig onder hoeken van 50° 13′ en 20° 15′ 20″ met de verticaal gezien worden, hoe hoog was dan het vliegtuig?

524, Op te lossen:

a. $\sqrt{3} \sin (x - 60°) + \sqrt{2} \cos (x + 45°) = 0$,

b. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x + \cos x}$.

525. *a.* Te bewijzen in een driehoek:

$$s - b = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{b \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} B} = \frac{c \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

b. Bewijs met behulp van deze gelijkheden

$$R r = \frac{(s - b)^2 \sin \frac{1}{2} B}{4 \sin \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C} = \ldots.$$

Het ontbrekende zelf in te vullen.

c. Druk met behulp van de gelijkheden in *a* de oppervlakte van den driehoek uit in $s - b$ (of in $s - a$ of $s - c$) en de hoeken.

526. Vierhoek ABCD, waarin AB = 12 en CD = 16, wordt door diagonaal AC in twee deelen verdeeld. die zich verhouden als 2 : 1. Als ∠ CAB de helft is van ∠ DCA, bereken dan ∠ CAB.

527. Op te lossen:

a. $\operatorname{tg} (240° - 5x) \cos (210° + 5x) - \sin (210° + 5x) - \frac{3}{2} \cos (30° + 5x) = 0$,

b. $\dfrac{\operatorname{tg} (288° - 3x) \operatorname{tg} (162° + 3x)}{\sec (240° - 3x) \operatorname{cosec} (210° + 3x)} = \frac{1}{3}$.

528. Druk $\sin (x + 45°)$ uit in $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$.

529. Op te lossen:

a. $\operatorname{tg} (240° - 4x) \operatorname{tg} (30° + x) + 1 = 0$,

b. $\dfrac{\text{tg}\,(240^\circ - 4x)}{\text{tg}\,(30^\circ + 4x)} - 2 = 0.$

530. Als in $\triangle$ ABC de zwaartelijn uit A den hoek α in de twee aan de zijden b en c grenzende deelen x en y verdeelt, bewijs dan

$$\text{tg}\,\frac{x-y}{2} : \text{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \text{tg}\,\frac{x+y}{2} : \text{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

531. Als gegeven zijn twee hoeken van een driehoek, = 63° 28′ en 35° 37′, bereken dan de deelen, waarin de derde hoek door de zwaartelijn uit het hoekpunt van dien hoek verdeeld wordt.

532. Als gegeven is $\text{cosec}^2\,\alpha = 1\frac{1}{8}$ en $\sec 2\beta = 1\frac{1}{3}$, terwijl α een stompe hoek is en β een hoek is in het vierde kwadrant, bepaal dan zonder tafel $\text{tg}\,(90^\circ + \alpha - \frac{1}{2}\beta)$.

533. In vierhoek ABCD, waarin AB = 30,8 en BC = 14,06 een rechten hoek insluiten, ziet men uit D deze zijden respectievelijk onderhoeken van 121° en 31°. Onder welken hoek ziet men uit B de verbindingslijn van D met het midden van AC?

534. Als gegeven is

$$\sin B\,(\cos C - \cos A) = (\sin A - \sin C)\,(1 + \cos B),$$

bewijs dan, dat òf A = C, òf B = 180°, òf A + B + C = 180° is.

535. *a.* Van een vierhoek ABCD, waarin en waarom een cirkel beschreven kan worden, is $\angle$ A = α, $\angle$ B = β, terwijl de straal van den ingeschreven cirkel r is. Bepaal (voor logarithmische berekening geschikt) de oppervlakte van dezen vierhoek.

b. Dezelfde opgave voor de getallengegevens $\alpha = 80^\circ\,32'\,17''$, $\beta = 70^\circ\,29'\,17''$, $r = 15{,}3$ cM.

536. Op te lossen:

a. $\sin x \cos x - 7 \sin^2 x = -6$,

b. $\sin 3x\,(\sin 3x + \sqrt{1{,}62}) = \cos 3x\,(\cos 3x + \sqrt{1{,}62})$.

537. Als de verbindingslijnen van het middelpunt van den ingeschreven cirkel van een driehoek met de hoekpunten A, B en C p, q en r zijn, bewijs dan

$$p : q : r = \sqrt{\frac{s-a}{a}} : \sqrt{\frac{s-b}{b}} : \sqrt{\frac{s-c}{c}}.$$

538. Als de afstanden van het hoogtepunt van een driehoek tot de drie hoekpunten zijn f, g en h, en de hoogtelijnen h_a, h_b en h_c te bewijzen

a. $f + g + h = 2\,R\left(1 + 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right)$.

b. $\dfrac{h_a \cos\frac{\alpha}{2}}{2\,s} = \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$.

539. Op te lossen

$\sin(2x + 30°) - \cos(2x + 30°) + 5\sqrt{2}\cos(2x - 15°) = 0.$

540. Als gegeven is $A + B + C = 90°$, te bewijzen

$\cos(A - 60°) + \cos(B - 60°) + \cos(C - 60°) =$

$$= 4 \cos\left(\frac{A}{2} + 15°\right) \cos\left(\frac{B}{2} + 15°\right) \cos\left(\frac{C}{2} + 15°\right).$$

541. Te bewijzen in een willekeurigen driehoek

a. $a\,(a - b\cos\gamma) = c\,(c - b\cos\alpha)$,

b. $\dfrac{b - a\,(\cos\gamma - \sin\gamma)}{c - a\,(\cos\beta - \sin\beta)} = \dfrac{c}{b}$.

542. Als de hoogtelijn van een driehoek een hoek in de deelen x en y en de overstaande zijde in de deelen h en k verdeeld, te bewijzen dat men heeft

$$\sin(x - y) = \frac{h - k}{h + k} \sin(x + y).$$

543. Als hoogtelijn en bissectrix van $\triangle$ ABC, beide uit A, een hoek φ vormen, terwijl hoogtelijn en zwaartelijn uit A een stuk $= d$ uit de zijde a snijden, te bewijzen

$$\sin 2\varphi = \frac{2\,d}{a} \sin\alpha.$$

544. Als men in een willekeurig hoekpunt van $\triangle$ ABC twee rechten trekt, die gelijk zijn aan een der aan dat hoekpunt grenzende zijden en met die zijde naar weerszijden den hoek H maken, en men verbindt de uiteinden dezer rechten met het over de gekozen zijde liggende hoekpunt door de verbindingsrechten p en q, bewijs dan

$$p^2 - q^2 = 8 \triangle ABC \times \sin H.$$

545. *a.* In een driehoek is gegeven een zijde a, het verschil der beide andere zijden v_{bc} en de hoek α. Geef een formule, voor logarithmische berekening geschikt, voor de berekening der hoeken β en γ.

b. Te berekenen de elementen van een driehoek, als gegeven zijn $a = 17$ cM, $v_{bc} = 3$ cM, $\alpha = 47°$.

546. *a.* In een driehoek is de omtrek $= 2s$ gegeven, en de hoeken α, β en γ. Geef formules, voor logarithmische berekening geschikt, voor de bepaling der drie zijden.

b. Van een driehoek de zijden te berekenen, als gegeven zijn de omtrek = 100 cM en twee hoeken, 33° 17′ 24″ en 67° 23′ 36″.

547. Als A, B, C en D de hoeken van een vierhoek zijn, bewijs dan

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D =$$
$$= 2\,(1 + \cos(A + B)\cos(A + C)\cos(A + D)) = \ldots\ldots$$

(Het ontbrekende zelf in te vullen).

Wat wordt uit deze vergelijking wanneer D = 180°?

548. Ontbind in factoren

$$x^2 - 4\,xy \cos P \cos C + 2\,y^2 (\cos 2C + \cos 2P).$$

---

549. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, te bewijzen

a. $\sin\alpha \sin\beta + \sin\gamma \sin\delta = \sin(\alpha + \gamma)\sin(\alpha + \delta) =$
$= \sin(\beta + \delta)\sin(\beta + \gamma)$,

b. $\cos\alpha \cos\beta + \cos\gamma \cos\delta = \sin(\alpha + \gamma)\sin(\alpha + \delta) =$
$= \sin(\beta + \delta)\sin(\beta + \gamma)$,

c. $\sin\alpha \cos\beta - \sin\gamma \cos\delta = -\sin(\alpha + \gamma)\cos(\alpha + \delta) =$
$= \sin(\beta + \delta)\cos(\beta + \gamma)$,

d. $\cos\alpha \sin\beta - \cos\gamma \sin\delta = \sin(\alpha + \gamma)\cos(\alpha + \delta) =$
$= -\sin(\beta + \delta)\cos(\beta + \gamma)$.

550. Als gegeven is $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, bewijs dan

$$-\sin\beta\cos\gamma + \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= \cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(2\beta + \frac{\alpha}{2}\right).$$

551. Als A, B, C en D de hoeken van een vierhoek zijn, bewijs dan;

a. $\cos C \cos D - \cos A \cos B = \sin(A + C)\sin(A + D) =$
$= \sin(B + D)\sin(B + C)$,

b. $\sin C \sin D - \sin A \sin B = -\sin(A + D)\sin(B + D) =$
$= -\sin(B + C)\sin(A + C)$,

c. $\cos C \sin D + \cos A \sin B = \cos(A + D)\sin(B + D) =$
$= -\cos(B + C)\sin(A + C)$,

d. $\cos C \sin D + \sin A \cos B = \sin(A + D)\cos(B + D) =$
$= -\sin(B + C)\cos(A + C)$.

552. Als A, B, C en D de hoeken van een vierhoek zijn, bewijs dan

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} D =$$
$$\frac{\sin(A + B)\sin(A + C)\sin(A + D)}{\cos A \cos B \cos C \cos D} = \ldots.$$

(zelf in te vullen).

Wat wordt uit deze vergelijking als $D = 180°$?

553. Als in een driehoek gegeven is

$$\sin(\alpha - \gamma) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2},$$

bewijs dan, dat $\gamma = 60°$ is.

554. Als in een driehoek $\frac{\cos B}{\cos A} = x$ en $\frac{\sin B}{\sin A} = y$ is, bewijs dan:

a. $\frac{(1 + x)(1 - y)}{(1 - x)(1 + y)} = -\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$.

b. $1 - xy + (x - y)\cos C = 0$.

555. Bewijs, dat een driehoek òf rechthoekig òf gelijkbeenig is, wanneer daarin gegeven is:

a. $a \cos B - b \cos A = c \sin (A - B)$, of

b. $\frac{a - b}{c} = \sqrt{2} \sin \frac{A - B}{2}$.

556. Te bewijzen, dat in een $\triangle$ ABC, waarin de zijde b gelijk is aan de halve som van a en c, men heeft

$$2 \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A - C}{2}.$$

557. Te bewijzen, dat als in een driehoek gegeven is

$$\cos B + \cos 2 B + \cos (A - C) = 1,$$

de zijde b middelevenredig is tusschen a en c.

558. Bewijs, dat als $A + B + C = 180°$ is, men heeft

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C.$$

---

559. Bepaal de lengte van een cirkelboog van 20° 30′ 42″, als de straal van den cirkel 5,3746 M is.

560. Bepaal de lengte van een boog van 119° 23′ 34″, als de bijbehoorende koorde 5 cM is.

561. Bepaal den omtrek van een segment met een straal van 18,367 M en een boog van 307° 30′.

562. Bereken de oppervlakte van een segment, als de oppervlakte van den bij het segment behoorende sector 50 M² en de lengte van den boog van het segment 19,865 M is.

563. Een sector met een middelpuntshoek van 201° 13′ 27″ heeft een omtrek van 100 M. Bepaal de oppervlakte van dien sector.

CURSUS III.

F. EXAMENVRAAGSTUKKEN.

§ 23. Eindexamen H. B. S.

1. Los x op uit de vergelijking:

$$4 \cos 2x \, (1 + \cos^2 x) + \frac{17 \cos x \cot x}{\operatorname{tg} x + \cot x} = \frac{17 \sin x}{\operatorname{tg} x + \cot x}.$$

(1900 N°. 1)

2. In een rechthoekigen driehoek, waarvan de kleinste hoek A is en waarvan de zijden een rekenkundige reeks vormen, is:

$$4 \operatorname{tg}. \tfrac{1}{2}A + 2 = 3 \sec^2 \tfrac{1}{2}A.$$

(1900 N°. 2)

3. Twee punten A en B liggen a en b meter boven een horizontaal vlak, in welk vlak een punt C is gelegen.

Als de richtingen CA en CB met het horizontale vlak hoeken α en β maken, en de projectie van den gezichtshoek ACB op het horizontale vlak γ is, hoever is dan A van B verwijderd?

Gegeven: $a = 200$ meter; $b = 150$ meter; $\angle \alpha = 8° \, 35' \, 25''$; $\angle \beta = 10° \, 19' \, 36''$; $\angle \gamma = 140° \, 45' \, 10''$. (1900 N°. 3)

---

4. Los x op uit de vergelijking:

$$\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x} + \frac{5}{2 \cos 2x} - \tfrac{1}{4} \cos 2x = \tfrac{1}{4} \times \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(1901 N°. 1)

5. Als d de lijn is, die hoek C van driehoek A B C middendoor deelt, bewijs dan:

$$d = \frac{2 \times \text{oppervlak } \triangle \text{ ABC}}{c \cos \frac{1}{2} (A - B)}.$$

(1901 No. 2)

6. Van vierhoek ABCD, die in een cirkel is beschreven, zijn gegeven: zijde AB = 12,631 M.; zijde BC = 9,584 M.; zijde CD = 5,281 M.; diagonaal AC = 15,753 M.

Bereken de diagonaal B D. (1901 N°. 3)

---

7. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$2\,(\mathrm{tg}\,x - 1)\cos 45^\circ + \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + \frac{4\,\mathrm{tg}\,x}{\sin 2x} + 1} = 0.$$

(1902 N⁰. 1)

8. Leid den consinusregel der triginometrie af, daarna de formules voor de berekening der halve hoeken des driehoeks en bewijs dat: $I = s\,(s - a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,A$,
waarin I de grootte van het oppervlak, s de halve som der zijden, a de lengte van een zijde en A de grootte van den hoek over die zijde voorstelt (1902 N⁰. 2)

9. Op de helling van een berg staat een toren. Gaat men van den voet van dien toren langs een hellend pad naar beneden over een afstand van 100 meter, dan ziet men de hoogte van den toren onder een hoek van 46° 10′; gaat men langs het verlengde van dat rechte pad in dezelfde richting 175 meter verder, dan ziet men de hoogte van den toren onder een hoek van 25° 35′. Hoe hoog is de toren? (1902 N⁰. 3)

10. Bereken alle waarden van x, tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$\sin(90^\circ + 2x) = \frac{\sin 324^\circ\,17'\,50'' \times \mathrm{tg}\,208^\circ\,23'\,52'' \times \mathrm{cosec}\,117^\circ\,12'\,25''}{\cos 195^\circ\,16'\,36''}.$$

(1903 N⁰. 1)

11. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{\sin(x + 60^\circ) + \cos(x - 60^\circ)}{\cos x} = \mathrm{tg}^2 x - 1.$$ (1903 N⁰. 2)

12. Uit de uiteinden A en B. eener basis voor afstandsmeting, lang 850 meters, meet men gelijktijdig de hoeken BAP = 96° 40′ 50″ en ABP = 33° 6 12″, als P een punt voorstelt dat in beweging is. Na 5 minuten meet men weer gelijktijdig de hoeken BAQ = 40° 52′ 15″ en ABQ = 122° 45′ 32″, als Q de plaats is, waar het bewegende punt zich op dat oogenblik bevindt. Verondersteld wordt, dat het punt P een eenparige beweging heeft.

Men vraagt de snelheid van het punt P te berekenen, evenals den hoek, dien de richting, waarin het punt P zich beweegt, maakt met de loodlijn op de basis A B. (1903 N⁰. 3)

13. De waarden van x te vinden die voldoen aan de vergelijking: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$. (1904 N°. 1)

14. Van een driehoek ABC zijn de hoeken A, B en C, de zijden over die hoeken a, b en c. Bewijs dat de driehoek gelijkhoekig is als:

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \quad \text{en} \quad \sin A \sin B = \tfrac{3}{4} \text{ is.}$$ (1904 N°. 2)

15. De basis van een driehoek is 14,781 meter, het verschil der opstaande zijden 2,834 meter en de kleinste hoek aan de basis 25° 11′ 20″.

Bereken de opstaande zijde en de oppervlakte van den driehoek. (1904 N°. 3)

16. Bereken x uit de vergelijking:

$$(2 + 3 \cos 2x) \sin 3x - \sin x = 0.$$ (1905 No. 1)

17. Toon aan:

$$\left\{\frac{\sin(270° - a)\,\mathrm{tg}\,(90° + a)}{\cos(a - 180°)\cot(360° - a)} - \frac{\mathrm{tg.}\,(-a)}{\cot(180° + a)}\right\} \times \left\{\frac{\mathrm{tg}\,(225° - a)}{\cot(225° + a)} + \frac{\sin(a + 180°)}{\sec(90° - a)}\right\} = 1.$$

(1905 N°. 2)

18. Van een trapezium ABCD is de oppervlakte 800,13 vierkante meter, de langste evenwijdige zijde AD = 41,56 meter, de diagonaal AC = 40,98 meter, en de hoek DAC = 36° 11′ 19″.

Bereken de opstaande zijde AB. (1905 N°. 3)

19. De waarden van x te vinden uit de vergelijking:

$$2 \sin^3 x - \sin x = \cos 4x - 2 \cos 2x + 1.$$ (1906 N°. 1)

20. Bereken alle waarden van x tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$\mathrm{tg}\,(90 + 3x) = \frac{\cos 312° 38' 50'' \times \mathrm{tg}\, 236° 15' 40'' \times \sec 110° 56' 10''.}{\sin 218° 12' 4''}$$

(1906 N°. 2)

21. Van driehoek ABC zijn gegeven: de basis AB = 24,326 meter, de zijde AC = 20,562 meter en hoek A = 42° 18′ 22″.

Men vraagt den straal te berekenen van den cirkel, die de zijde AB in B raakt en door het hoekpunt C gaat. (1906 N°. 3)

22. Bereken x uit de vergelijking:

$$\text{tg } 2x - \text{tg } x = \frac{4 \sec 2x}{1 + \cot^2 x}$$ (1907 N°. 1)

23. Te bewijzen, dat driehoek ABC rechthoekig is, als gegeven is:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cot \frac{1}{2} C \times \cos \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\sec A \times \sec B}{\sec A + \sec B}.$$

(1907 N°. 2)

24. Van een vierhoek ABCD zijn gegeven: de zijden AB = 19,35; BC = 41,27; CD = 46,04; DA = 37,20 en hoek CAB = 57° 38′. Wordt gevraagd te berekenen hoek ADB.

(1907 N°. 3)

---

25. Los x op uit: $(1 + 5^{\frac{1}{2}} \sin x) \operatorname{cosec} 2x + 2 \cot 2x = 8 \text{ tg } x$.

(1908 N°. 1)

26. Bereken tg $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 30°$, dat is tg 7° 30′ zonder gebruik te maken van een logarithmentafel. Als de verkregen uitkomst tot de eenvoudigste gedaante herleid is, toets dan die uitkomst door het opzoeken der logarithmen, dus met behulp van een logarithmentafel. (1908 N°. 2)

27. In een halven cirkel is een vierhoek ABCD beschreven. Bereken het oppervlak van den vierhoek, als gegeven is: de middellijn AB = 24,56, BC = 10,68 en CD = 8,72. (1908 N°. 3)

---

28. Bereken alle waarden van x, tusschen 0° en 360°, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\text{tg } (270° - x)}{\sec (270° + x)} + \frac{\cot (270° + x)}{\operatorname{cosec} (270° - x)} = \frac{1}{3} \text{ tg } (315° - x).$$

(1909 (N°. 1)

29. Van driehoek ABC zijn gegeven: ∠ A = 64° 32′ 8″, zijde AB = 10,736 meter en de straal van den omgeschreven cirkel R = 8,542 meter. Gevraagd wordt de grootte van het oppervlak van dien driehoek. (1909 N°. 2)

---

30. Om den driehoek ABC, waarvan ∠ C = 29°, zijde AC = 2,345 centimeter en zijde BC = 3,572 centimeter is, wordt een cirkel beschreven.

Bereken den straal van dien cirkel en het oppervlak van het segment, dat begrensd wordt door de koorde AB en den kleinsten boog, door die koorde onderspannen. (1910 N°. 1)

31. Van een driehoek ABC zijn gegeven:

$$a + b = 38{,}189 \text{ centimeter,}$$
$$c = 23{,}37 \quad \text{"} \quad ,$$
$$\text{en } A - B = 21^\circ\, 6'\, 42'' \quad \text{"} \quad ,$$

als a, b en c de zijden en A, B en C de hoeken voorstellen.

Bereken den straal van den ingeschreven cirkel. (1910 N°. 2)

32. Los x op uit de vergelijking:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\cos x - \cos 3x}{6}$$

en bepaal welke waarden, kleiner dan 360°, aan de vergelijking voldoen. (1910 N°. 3)

---

33. Van een vierhoek ABCD om een cirkel beschreven is gegeven:

$AB = 156$, $BC = 109$, $CD = 163$ en $\angle B = 107^\circ\, 6'\, 51''$.

Bereken hoek D, den inhoud van den vierhoek en den straal van den ingeschreven cirkel. (1911 N°. 1)

34. Als een driehoek ABC, A, B en C de hoeken en a, b en c de overstaande zijden voorstellen en:

$$\frac{\sin(90^\circ + A)}{\operatorname{tg}(270^\circ + A)} \times \frac{\cot(180^\circ - A)}{\cos(360^\circ - A)} + \frac{\cos(90^\circ - A)}{\cot(90^\circ + A)} \times \frac{1}{\sec(360^\circ - A)} = \frac{\operatorname{tg}(225^\circ + B)}{\cot(225^\circ - B)} \times \frac{\cos B}{\operatorname{cosec} B \times \cot B},$$

dan is de zijde a = zijde b. Bewijs dit. (1911 N°. 2)

35. Bepaal de waarden van x, die liggen tusschen 0° en 360° en die voldoen aan de vergelijking:

$$\operatorname{tg}(3x - 60^\circ) = \frac{\sin 215^\circ\, 13' \times \sec(-15^\circ\, 18'\, 2'')}{\operatorname{tg} 405^\circ\, 20' \times \operatorname{cosec} 156^\circ\, 54'\, 56''}.$$

(1911 N°. 3)

---

36. Van een vierhoek ABCD, in een cirkel beschreven, zijn gegeven:

zijde BC = 60, zijde CD = 52, zijde DA = 39 en diagonaal DB = 56 centimeters.

Bereken de hoeken, de onbekende zijde en de tweede diagonaal van dezen koordenvierhoek. (1912 N°. 1)

37. Gevraagd wordt, zonder gebruik te maken van de tafels der logarithmen van de gewone getallen en van die der goniometrische logarithmen, de grootte te bepalen van tg $(a + b)$, als gegeven zijn:

$\operatorname{tg}(90° + \frac{1}{2}a) = -\frac{2}{3}$ en $\sin(270° + 2b) = -\frac{7}{25}$, terwijl men weet, dat de grootte van $a + b$ ligt tusschen 0° en 180°. (1912 N°. 2)

38. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\cos x\,(\sin x + \cos x)}{\cot(45° - x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\sin^2(45° - x)$$

en geef aan, welke dier waarden gelegen zijn tusschen 0° en 360°. (1912 N°. 3)

---

39. Bepaal de waarden van 0° tot 360°, welke voldoen aan:

$$4\cos(270° - \tfrac{1}{2}x) = \frac{\sec(180° + x)\operatorname{tg}(2x - 45°)\operatorname{tg} 600°}{2\sin(90° + \frac{1}{2}x)\cot(2x + 225°)}$$

(1913 N°. 1)

40. In een kwartcirkel AMB trekt men 2 stralen MC en MD zoodanig, dat $\angle$ AMC = α en $\angle$ CMD = β. Men trekt nu de lijnen AB, AC, CD en DB. Druk het oppervlak van vierhoek ACDB uit in den straal R en in α en β, door middel van een formule, die geschikt is voor de berekening met logarithmen.

Daarna voere men de berekening uit met de volgende gegevens:
R = 10 cM.; koorde AC = 5 cM.; koorde CD = 8 cM. (1913 N°. 2)

41. Van $\triangle$ ABC zijn gegeven:

$\angle$ C = 75° 34′ 20″,
de binnenbissectrix van $\angle$ C = 12,063 cM.;
de buitenbissectrix van $\angle$ C = 35,785 cM.
Gevraagd: de zijde c te berekenen. (1913 N°. 3)

---

42. De hoeken, kleiner dan 360°, te bepalen, die voldoen aan:
$\cos 3x + \cos x + \sin 3x + \sin x = \cos (45° - 2x) \sec x.$
(1914 N°. 1)

43. In den scherphoekigen $\triangle$ ABC laat men de hoogtelijn AD neer op BC. De bissectrice van $\angle$ ABC snijdt AD in E. Bereken, zonder gebruik van een tafel, de lengte van DE.

$$\textit{Gegeven is} \begin{cases} \sec \angle ACB = \frac{5}{3}, \\ \sin \angle BAC = \frac{56}{65}, \\ AD = 12 \text{ cM.} \end{cases}$$
(1914 N°. 2)

44. Van $\triangle$ ABC is gegeven: AB = 16,239 M., AC = 9,917 M. en $\angle$ A = 53° 28′ 44″.
Zij M het middelpunt van den omgeschreven cirkel en O het middelpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, bereken dan het oppervlak van $\triangle$ BMO. (1914 N°. 3)

---

45. Bepaal de waarden van 0° tot 360°, die voldoen aan de vergelijking:
$$(1 + \text{tg } 60°) \sin x + (1 - \text{tg } 60°) \cos x = \sec x.$$
(1915 N°. 1)

46. Als voor de hoeken van driehoek ABC geldt:
$$\sec B (\sin A - \text{tg } C) = \sec C (\text{tg } B - \sin A),$$
dan is de driehoek rechthoekig. Bewijs dit. (1915 N°. 2)

47. Van een koordenvierhoek, waarvan A, B, C en D de op elkaar volgende hoekpunten zijn, is gegeven:
AD = CD; $\angle$ B is scherp; de straal R van den omgeschreven cirkel is 5 cM. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in S. AS = 2,3 c.M., CS = 5,7 c.M.
Gevraagd: de lengte van BC. (1915 N°. 3)

---

48. Bepaal de waarden van $x < 360°$ uit:
$$\cos (45° + 2x) + \sin (45° + 2x) = 2 \cos 4x + \sin 2x \times \sqrt{2}.$$
(1916 N°. 1)

49. Van een koordenvierhoek ABCD zijn de zijden AB, BC, CD en DA respectievelijk gelijk aan a, b, c en d; bewijs dat

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)}.$$

Leid hieruit formules af, welke geschikt zijn om $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} A$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ logarithmisch te berekenen, als a, b, c en d gegeven zijn, daarbij invoerende $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Druk ten slotte het oppervlak van den koordenvierhoek in a, b, c en d uit. (1916 N°. 2)

50. In $\triangle$ ABC is een cirkel beschreven; de verbindingslijnen der raakpunten vormen een nieuwen driehoek. Bereken den straal van dien cirkel en de oppervlakte van laatstgenoemden driehoek, als gegeven is:

$$\angle A = 55^\circ\, 14'\, 46'',\ AC = 16{,}43;\ AB = 18{,}12.$$

(1916 N°. 3)

---

51. Van de scherpe hoeken a en b is gegeven: $\operatorname{tg}(45^\circ + a) = 2\frac{3}{7}$ en $\sec(360^\circ - \frac{1}{2} b) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Bereken zonder gebruik te maken van een logarithmentafel de waarde van $\sin(a + 2b)$ en ook van $\cos(2a + b)$. (1917 N°. 1)

52. Van een trapezium, waarin een cirkel kan beschreven worden, is gegeven:

het been AD = 25,361;

het been BC = 31,947;

het verschil van de hoeken A en B om de langste evenwijdige zijde = 18° 37′ 50″.

Bereken het oppervlak van het trapezium. (1917 N°. 2)

---

53. Als in een driehoek ABC de sinussen der hoeken A, B en C in deze volgorde een rekenkundige reeks vormen, dan is

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \times \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bewijs dit. (1918 N°. 1)

54. Van een parallelogram is een der diagonalen 8 cM. Deze diagonaal maakt hoeken van 30° en 45° met de zijden. Bereken:

a. zonder logarithmentafel de oppervlakte van dit parallelogram;

b. met behulp van een lagarithmentafel de hoeken, welke de andere diagonaal met de zijden maakt. (1918 N⁰. 2)

---

55. A, B en C zijn de hoeken van een driehoek.
Bewijs, dat deze driehoek gelijkbeenig is, als

$$\cot 2\,A + \frac{\cos C}{2 \sin A \cos B} = 0.$$

(1919 N⁰. 1)

56. In een koordenvierhoek ABCD is de zijde AB = 8, de zijde AD = 7 en de diagonaal BD = 9 c.M. De diagonaal AC verdeelt ∠ BAD in de hoeken BAC en DAC, wier sinussen zich in de genoemde volgorde verhouden als 6 : 5.
Bereken de zijde BC. (1919 N⁰. 2)

---

§ 24. Eindexamen Gymnasium.

57. Van een driehoek is gegeven: $\operatorname{tg} A = -3$, $\cos 2B = \frac{1}{10}\sqrt{10}$.
Bereken $\operatorname{tg}^2 C$ zonder de waarden van A en B te berekenen.
(Assen)

58. Om een zevenhoek in een cirkel te beschrijven, zet men wel 7 maal af de halve zijde van den ingeschreven driehoek. Welke fout maakt men? (Assen)

59. De hoekpunten van een vierkant liggen elk in een zijde van een ander vierkant, welks oppervlak $1\frac{1}{2}$ maal zoo groot is als dat van het eerste. Bereken den hoek, dien een zijde van het eerste vierkant maakt met een zijde van het tweede.
(Gorinchem)

60. Welke waarden voldoen aan

$$\frac{4\,(1 - 2\sin^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + 2\,(1 - \cos 2x)\cos 2x = \cot x - \cot 2x\,?$$

(Arnhem)

61. Bereken de onbekende elementen van den vlakken △ ABC, als gegeven is
$a = 13$, $b + c = 29$ en de straal van den omgeschreven cirkel $R = 8{,}125$. (Nijmegen, Canisius Coll.)

62. Van $\triangle$ ABC is $\angle$ A = 69° 24′ 36″, $\angle$ B = 52° 25′ 13″, de bissectrice AD van $\angle$ A = 50,48 c.M. Op de basis AB beschrijft men een gelijkbeenigen driehoek, die dezelfde oppervlakte heeft als $\triangle$ ABC. Hoe groot is de tophoek van dien driehoek? (Katwijk)

63. Bepaal alle waarden, die voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\cos x\,(\sin x + \cos x)}{\cot\,(45^\circ - x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\sin^2\,(45^\circ - x).$$

(Zeist)

64. Van een vlakken driehoek zijn twee zijden 50,2 en 30,6 c.M. en de ingesloten hoek 72° 15′.

Bereken den hoek, dien de zwaartelijn en de bissectrice van den gegeven hoek met elkaar vormen. (Dordrecht)

65. Welke waarden van x, kleiner dan 360°, voldoen aan

$$\frac{4\sin^2 x}{\operatorname{tg} x + \cot x} + \frac{2\cos^2 x}{\cot x - \cot 2x} = \frac{\cot x + \operatorname{tg} x}{\cot x - \operatorname{tg} x}?$$

(Kampen)

66. Een vlakke driehoek is rechthoekig, als

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sec A + \sec B} = \cos A \cos B \sin C.$$

Bewijs dit. (Apeldoorn)

67. Bewijs, dat als in een vlakken driehoek de zijde b harmonisch middelevenredig is tusschen a en c,

$$c \cos A + a \cos C = R\,\frac{\cos(A - C) - \cos(A + C)}{\sin\frac{1}{2}(A + C)\cos\frac{1}{2}(A - C)},$$

waarin R den straal van den omgeschreven cirkel voorstelt. (Arnhem)

68. Bewijs, dat de zijde van den voetpuntsdriehoek van $\triangle$ ABC, welke over $\angle$ C staat, gelijk is aan $c \cos C$. (Amersfoort)

69. Bepaal alle waarden, die voldoen aan

$$\frac{4\sin 2x\,\sin^2\,(45^\circ - x)}{\sin^2 x} + 4 = \frac{1 - 4\sin 2x}{\cos 2x - 1}.$$

(Winschoten)

70. De omtrek van een driehoek is 50 c.M., hoek A = 73° en de straal van den omgeschreven cirkel is 12 c.M. Bereken de twee onbekende hoeken. (Amsterdam, Geref. Gymn.)

71. Los x op uit

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos 2x + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}$$

(Schiedam)

72. Van △ ABC is gegeven de som der hoogtelijnen op de opstaande zijden = 6, en de hoeken aan de basis = 56° en 68°. Bereken het oppervlak. (Nijmegen)

73. Bepaal de waarden van $x < 360°$, die voldoen aan de vergelijking

$$\tfrac{1}{2} \sec x = 2 \sin x \operatorname{tg} (45° - \tfrac{1}{2} x) = \cos x.$$

(Nijmegen, Canisius Coll.)

74. Bewijs, dat △ ABC rechthoekig is, als

$$\operatorname{tg} A \sin B = \sin^2 C \cos B.$$ (Middelburg)

75. Van △ ABC is gegeven
$b = 18$, $a - c = 4$, en de straal van den aangeschreven cirkel $r_b = 16$.
Bereken het oppervlak van △ ABC. (Amsterdam)

76. Van △ ABC is gegeven, dat

$$2A = 3B \text{ en } a : b = 2 : 1.$$

Bereken de hoeken van dien driehoek. (Amsterdam)

---

§ 25. Staatsexamen.

77. Los x op uit

$$5 \operatorname{tg} 3x + 3 \operatorname{tg} 2x = 0.$$ (1914)

78. Een scherpe of stompe hoek C wordt verdeeld in twee hoeken x en y. Indien tusschen deze hoeken de betrekking bestaat

$$\frac{\sin x}{\cos y} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

dan deelt de deellijn hoek C in twee gelijke deelen. Bewijs dit. (1914)

79. Van $\triangle$ ABC is gegeven de tophoek A = 60° de bissectrix van $\angle$ A = 20 M. en de straal van den ingeschreven cirkel = 6 M. Bereken de grootste der opstaande zijden. (1914)

80. In $\triangle$ ABC zijn de hoogtelijnen AD en BE getrokken. Bereken den straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ CDE als gegeven is: $a = 712{,}5$; $b = 536{,}2$; C = 57° 18′. (1914)

81. In $\triangle$ ABC is het middelpunt M van den omgeschreven cirkel verbonden met de hoekpunten A en B. Zij O het middelpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABM. Bereken het oppervlak van $\triangle$ ACO als gegeven zijn de zijde AB = 315,6 d.M. en de hoeken A = 70° 52′ en B = 52° 12′. (1914)

82. Bewijs, dat de verhouding van het oppervlak van den voetpuntsdriehoek tot dat van den driehoek gelijk is aan 2 cos A cos B cos C, als A, B en C de hoeken des driehoeks zijn. (1914)

83. Van een driehoek zijn de zijden $-1 + \sqrt{7}$, $\sqrt{7}$ en $1 + \sqrt{7}$. Bewijs, dat de grootste hoek van dien driehoek 90° grooter is dan de kleinste, zonder de hoeken te berekenen. (1914)

84. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking

$$4{,}23 \sin (x + 40°) = 13{,}76 \sin (x + 20°) \qquad (1914)$$

---

85. Los x op uit

$$(\cos x + 5 \sin x) \sec 3x = 1 + 5 \operatorname{tg} 3x. \qquad (1915)$$

86. Van een platten driehoek is gegeven

$$a = 59{,}54;\ b - c = 50{,}78;\ B - C = 112° 36' 42''.$$

Bereken het oppervlak van dien driehoek. (1915)

87. Bewijs dat in een willekeurigen platten driehoek

$$(a^2 - b^2) \sin C = c^2 \sin (A - B). \qquad (1915)$$

88. Los x op uit:

$$\frac{\sin x}{\cos (x + 60°)} + \frac{\sin x}{\cos (x - 60°)} = - \sin 2x. \qquad (1915)$$

89. De som van de pijlen der segmenten, die een driehoek ABC van zijn omgeschreven cirkel afsnijdt, is

$$2\,R\,(1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C),$$

als R de straal van den omgeschreven cirkel voorstelt.
Bewijs dit. (1915)

90. Los x op uit:
$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = (\sin 2x + \sin 3x) \sec 2x \sec 3x.$ (1915)

91. Zij M het middelpunt van den omgeschreven cirkel en H het hoogtepunt van driehoek ABC. Druk den afstand van H tot zijde BC uit in de zijde a en de hoeken B en C, en bewijs, dat, als MH ∥ BC is: $2 \cos A = \cos (B - C)$. (1915)

92. Bereken de waarden van x, die voldoen aan

$$\sin x \sin 4x + 2 \sin^2 2x \cos x = \\ = 2 \cos x \cos 2x \sin 3x \,(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x).$$ (1915)

93. Van een vlakken driehoek zijn gegeven het oppervlak O, de straal des ingeschreven cirkels r en ∠ A. Druk den straal des omgeschreven cirkels in deze gegevens uit. (1915)

94. Bepaal alle waarden van x, die voldoen aan

$$\frac{4 \sin 2x \sin^2 (45^\circ - x)}{\sin^2 x} + 4 = \frac{1 - 4 \sin 2x}{\cos 2x - 1}.$$ (1915)

95. Uit een punt P buiten een cirkel zijn de raaklijnen PA en PB aan den cirkel getrokken. Uit het raakpunt A is de lijn getrokken door het midden C van den kleinsten boog AB. Deze snijdt de raaklijn PB in een punt D zóó dat $PD = \frac{3}{5}$ PB is.
Bereken den hoek dien de raaklijnen met elkaar maken. (1915)

---

96. In een cirkel met een straal van 3 c.M. is een zeshoek ABCDEF beschreven, waarvan de zijden AB = CD = EF en BC = DE = AF = 2 AB zijn. Bepaal de lengten dezer zijden en de bogen, die ze onderspannen. 1916)

97. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan

$$\frac{10 \sin x - 5 \sin 2x + 14 \cos x - 7 \cos 2x - 7}{\sin^2 \frac{1}{2} x} = 28.$$

(1916)

98. Gegeven: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$; $\sin(x + y) = b$.
Gevraagd: $\cos(x - y)$ uit te drukken in a en b. (1916)

99. Gegeven $x + y + z = 90°$.
Bewijs de formule

$$\cos x + \cos y + \cos z =$$
$$= 4 \cos\left(45° - \frac{x}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{y}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{z}{2}\right). \quad (1916)$$

100. Als in $\triangle$ ABC gegeven is $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\sin B}{\cos A}$, dan volgt hieruit dat de driehoek gelijkbeenig of rechthoekig is. Bewijs dit. (1916)

101. De verhouding van de hypothenusa eens rechthoekigen driehoeks tot de bissectrix van den rechten hoek is als $2\sqrt{6} : 1$. Bepaal de scherpe hoeken van den driehoek.

102. Van $\triangle$ ABC is gegeven
$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 51{,}7945$, $\angle A = 55° 32' 24''$, $\angle B = 44° 6' 26''$.
Bereken de zijde c. (1916)

103. In $\triangle$ ABC is gegeven AD = 40, BC = 24. De lijn CD, die $\angle$ ACB zoodanig verdeelt, dat $\angle BCD = 2 \times \angle ACD$, is eveneens 24. Bereken den hoek ACB. (1916)

104. De opstaande zijden van een driehoek zijn a en b; de lijn, die den buitenhoek van den tophoek C middendoordeelt, van den top tot het snijpunt met het verlengde der basis is p $(a < b)$.
Bewijs dat

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \frac{p(a - b)}{2ab}. \quad (1916)$$

---

105. Los x op uit

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0. \quad (1917)$$

106. Van een driehoek zijn gegeven $\angle$ C, de zwaartelijn uit C, m_c, en het verschil der zijden a en b. Geef de formules ter berekening van de zijden en hoeken van dezen driehoek. (1917)

107. In een gelijkbeenigen driehoek is de hoogtelijn uit den top de helft van de zwaartelijn uit een der hoekpunten aan de basis. Bepaal de hoeken des driehoeks. (1917)

108. Los x en y op uit:

$$\sin x \times \operatorname{tg} y = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}. \quad \sin y \times \operatorname{tg} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (1917)$$

109. Van $\triangle$ ABC zijn gegeven: $a = 20$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 50°$. Punt D is het midden van zijde BC; M is het middelpunt van den omgeschreven cirkel om $\triangle$ ABC. Bereken het oppervlak van den driehoek, waarvan de hoekpunten zijn D, M en A. (1917)

110. Van den platten $\triangle$ ABC is bekend AB = 12, CB = 8 en de buitenbissectrix van $\angle$ B gemeten tot het verlengde van AC, 32. Bereken $\angle$ B. (1917)

111. Als in een platten driehoek $\cos \frac{1}{2}(B - C) = 2 \sin \frac{1}{2} A$, dan is de straal des ingeschreven cirkels $\frac{1}{3}$ van de hoogtelijn op de zijde a. Bewijs dit.

112. Van een $\triangle$ ABC is $\angle C = 60°$ en $\dfrac{\cos B}{\cos A} = -\frac{1}{5}$. Bewijs, dat $\dfrac{\sin B}{\sin A} = 3$ is en bepaal de verhouding van de drie zijden, zoo mogelijk zonder logarithmentafel te gebruiken. (1917)

---

113. Los x op uit

$$\cos^8 x - \sin^8 x = \tfrac{5}{8} \cos 2x. \quad (1918)$$

114. Bewijs, dat een platte driehoek rechthoekig is, als gegeven is

$$c(\cos A + \cos B) = 2(a + b)\cos^2 \tfrac{1}{2} C. \quad (1918)$$

115. In den scherphoekigen $\triangle$ ABC zijn de drie loodlijnen AD, BE en CF getrokken. Men vraagt den straal van den in $\triangle$ DEF beschreven cirkel uit te drukken in de zijde a en de hoeken van $\triangle$ ABC. (1918)

116. Men beschrijft om den scherphoekigen $\triangle$ ABC een cirkel. In de punten A, B en C trekt men de raaklijnen aan dezen cirkel. Deze sluiten den $\triangle$ DEF in. Druk de verhouding van opp. $\triangle$ ABC tot opp. $\triangle$ DEF uit in de hoeken A, B en C. (1918)

NOORDHOFF's verzameling van Wiskundige Werken.

REEDS VERSCHENEN:

1. Prof. Dr. Hk. de VRIES. **DE VIERDE DIMENSIE.** Een inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden. Prijs gebonden **f 3.90.**

2. Prof. Dr. F. SCHUH. **GREPEN UIT DE MODERNE MEETKUNDE.** Eerste deel: Reciproke transformaties in het vlak en in de ruimte. Hyperboloïden en Kegelsneden. Harmonische eigenschappen en cirkelbundels. Met 224 figuren in den tekst Prijs geb. **f 11.40.**

3. Prof. Dr. G. SCHOUTEN. **DE GRONDSLAGEN DER REKENKUNDE.** Met toepassingen op grenswaarden, oneindige reeksen en producten, gedurige breuken, dubbelreeksen. Prijs geb. **f 3.—.**

4. Prof. Dr. J. A. BARRAU. **LEERBOEK DER AN. MEETKUNDE.** Eerste deel: Het platte vlak. Prijs geb. **f 10.20.**

5. Prof. Dr. F. SCHUH. **LEERBOEK DER THEORETISCHE REKENKUNDE.** Eerste deel: Natuurlijke getallen en cardinaalgetallen. Het rekenen in talstelsel en met positieve en negatieve getallen. Binomium van Newton en de stellingen van Fermat en Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken van deelbaarheid. Ontbinding der Faculteiten. Prijs geb. **f 10.20.**

6. Prof. Dr. Hk. de VRIES. **LEERBOEK DER DIFF. EN INT. REKENING EN VAN DE THEORIE DER DIFFERENTIAALVERG. I.** De Differentiaal-, en de elementaire Integraalrekening. Gebonden **f 19.20.**

Inteekenaars op het N. T. v. Wiskunde hebben bij de verschijning van deelen in deze verzameling belangrijke reductie.